CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 6 PREMIÈRE ES 3

Exercice 1 : Un constructeur de matériel informatique fabrique de petites calculatrices dont le coût de production en fonction du nombre x d'unités produites est $C(x) = 800 + 6x + 0{,}02x^2$. Il vend la calculatrice 25 € l'unité.

1. Le coût moyen C_m est égal à $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{800+6x+0{,}02x^2}{x} = \dfrac{800}{x} + 6 + 0{,}02x$.

2. Pour étudier les variations de la fonction coût moyen C_m , on détermine sa fonction dérivée :
$C_m'(x) = \dfrac{-800}{x^2} + 0{,}02 = \dfrac{-800+0{,}02x^2}{x^2}$. Cette dérivée est du signe de $0{,}02x^2 - 800 = 0{,}02(x^2 - 40000)$ qui s'annule en $x = 200$ et $x = -200$, et est du signe de $a = 0{,}02 > 0$ pour les valeurs extérieures aux racines.
Donc la fonction C_m est croissante sur $]-\infty ; -200]$ et sur $[200; +\infty[$ et décroissante sur $[-200; 200]$.
3. Sur l'intervalle [1; 1000], cette fonction admet un minimum égal à $C_m(200) = 14$ atteint pour $x_0 = 200$.
4. Le coût marginal C_M est égal à la dérivée de la fonction coût : $C'(x) = 6 + 0{,}04x$.
5. $C_m(x_0) = 14$ et $C_M(x_0) = 6 + 0{,}04\times200 = 14$, donc $C_m(x_0) = C_M(x_0)$.
6. La recette $R(x)$ pour x calculatrices vendues $= 25x$.
7. Le bénéfice $B(x)$ pour x calculatrices vendues est égal à $B(x) = R(x) - C(x) = 25x - (800 + 6x + 0{,}02x^2) =$ $-0{,}02x^2 + 19x - 800$.
8. Pour trouver les valeurs de x telles que le constructeur obtient un bénéfice positif, on résout l'inéquation :
$B(x) \geqslant 0$: Le discriminant $\Delta = 19^2 - 4\times(-0{,}02)\times(-800) = 297 > 0$, donc il y a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-19-\sqrt{297}}{2\times(-0{,}02)} \simeq 905{,}84$ et $x_2 = \dfrac{-19+\sqrt{297}}{2\times(-0{,}02)} \simeq 44{,}16$.
Donc le constructeur obtient un bénéfice positif lorsque $x \in [45; 905]$.
9. $B'(x) = -0{,}04x + 19$ s'annule pour $x = \dfrac{19}{0{,}04} = 475$. Cette fonction dérivée est positive sur [0; 475] et négative sur $[475; +\infty[$. La fonction B est donc croissante sur [0; 475] et décroissante sur $[475; +\infty[$.
Donc le bénéfice est maximal lorsque $x = 475$ et ce maximum vaut $B(475) = 3712{,}50$.

Exercice 2 : On s'intéresse au jeu « Keno » de la Française Des Jeux. L'une des façons de jouer est la suivante : dans une grille contenant une fois chacun les nombres de 1 à 70, on choisit 10 numéros. Un tirage au sort de 20 numéros a lieu : une grille est gagnante dans l'un des deux cas suivants :
– soit aucun des numéros sortis n'a été trouvé ;
– soit au moins cinq numéros sortis ont été trouvés.
Les gains correspondants sont indiqués dans le tableau ci-contre :

Sur 10000 bulletins, on a obtenu les résultats suivants :

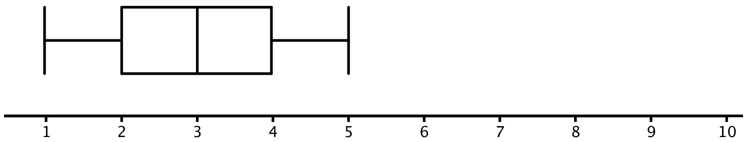
nombre de numéros trouvés	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
effectif	254	1253	2521	2922	1962	822	220	41	5	0	0

1. a. Le nombre de bulletins gagnants est égal à 254 + 822 + 220 + 41 + 5 = 1342.
b. Le pourcentage que cela représente est $\dfrac{1342}{10000}\times100 = 13{,}42\%$.
c. Ce pourcentage est proche du « 1 sur 7,38 » annoncé par la Française Des Jeux puisque $\dfrac{1}{7{,}32}\times100 = 13{,}55\%$.
2. Sur l'échantillon observé, le nombre de bons numéros sur un bulletin en moyenne est égal à la moyenne de la série statistique :
$\bar{x} = \dfrac{0\times254+1\times1253+2\times2521+3\times2922+4\times1962+5\times822+6\times220+7\times41+8\times5}{10000} = 2{,}8666$. Il y a en moyenne 2,8666 bons numéros par bulletin.

3. Pour déterminer la médiane, on calcule l'effectif total sur 2 = 5000; la médiane est la moyenne entre la 5000ème valeur et la 5001ème valeur, soit Me = 3;
Pour déterminer le premier quartile, on divise l'effectif total par 4 = 2500; Q_1 est la 2500ème valeur, soit $Q_1 = 2$;
Pour déterminer le troisième quartile, on divise l'effectif total par 4 et on le multiplie par 3 = 7500; Q_3 est la 7500ème valeur, soit $Q_3 = 4$;
Pour déterminer le premier décile, on divise l'effectif total par 10 = 1000; D_1 est la 1000ème valeur, soit $D_1 = 1$;

Pour déterminer le neuvième décile, on divise l'effectif total par 10 et on le multiplie par 9 = 9000; D_9 est la 9000ème valeur, soit $D_9 = 5$.

4. Le diagramme en boîte correspondant :



5. a. Au moins la moitié des bulletins comporte au plus 2 bons numéros : FAUX puisque la médiane est égale à 3.

b. 25 % au plus des bulletins comportent 4 bons numéros ou davantage : VRAI puisque $Q_3 = 4$.

c. Au moins 50 % des bulletins comportent de 2 à 4 bons numéros : VRAI puisque l'intervalle inter quartile est [2; 4].

6. Les 10000 joueurs ont misé 5 € chacun. Le total des gains redistribués est égal à

$5(254\times2 + 822\times2 + 220\times5 + 41\times10 + 5\times100) = 20810$ €; la somme jouée est de $10000\times5 = 50000$ €;

les gains représentent $\frac{20810}{50000}\times 100 = 41{,}62\%$ de la somme jouée.