CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 8 PREMIÈRE ES 3

Exercice 1 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-2x-3}$.

1. L'ensemble de définition de la fonction f est l'ensemble des réels tels que $x^2 - 2x - 3 \neq 0$; le discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4\times1\times(-3) = 16 = 4^2 > 0$, donc il y a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{2-4}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{2+4}{2} = 3$ Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$.

2. Pour tout réel x de D_f , $1 + \dfrac{-1}{4(x+1)} + \dfrac{9}{4(x-3)} = \dfrac{4(x-3)(x+1)-(x-3)+9(x+1)}{4(x+1)(x-3)} =$
$\dfrac{4(x^2-3+x-3)-x+3+9x+9}{4(x+1)(x-3)} = \dfrac{4x^2-8x-12+8x+12}{4(x+1)(x-3)} = \dfrac{4x^2}{4(x+1)(x-3)} = \dfrac{x^2}{x^2-2x-3} = f(x)$.

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$; de même $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$.

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} x^2 = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} (x^2-2x-3) = 0^+$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} x^2 = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} (x^2-2x-3) = 0^-$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} x^2 = 9$ et $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} (x^2-2x-3) = 0^-$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} x^2 = 9$ et $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} (x^2-2x-3) = 0^+$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x) = +\infty$.

4. On obtient alors trois asymptotes : la droite d'équation $x = -1$ et la droite d'équation $x = 3$ sont des asymptotes verticales à la courbe C; la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à C.

5. La dérivée de la fonction f est $f'(x) = \dfrac{2x(x^2-2x-3)-(x^2)(2x-2)}{(x^2-2x-3)^2} = \dfrac{2x^3-4x^2-6x-(2x^3-2x^2)}{(x^2-2x-3)^2} =$
$\dfrac{-2x^2-6x}{(x^2-2x-3)^2}$ qui est du signe de $-2x^2 - 6x = -2x(x+3)$ puisque le dénominateur est un carré.

Donc la fonction f est croissante sur $[-3; -1[$ et sur $]-1; 0]$ et décroissante sur $]-\infty; -3]$, sur $[0; 3[$ et $]3; +\infty[$.

6. Le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-3		-1		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1	↘	$\frac{3}{4}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

7. La fonction f admet un maximum local égal à 0 atteint en $x = 0$ et un minimum local égal à $\dfrac{3}{4}$ atteint en $x = -3$.

8. Équation des tangentes à la courbe C aux points d'abscisse -3, 0, 1 :

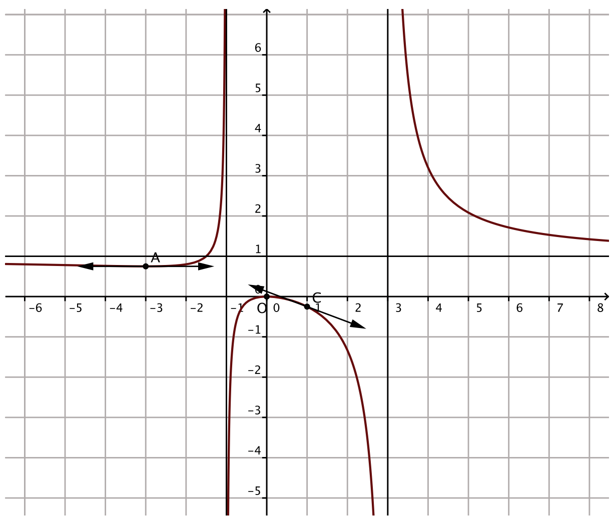
En -3 : $y = f'(-3)(x+3) + f(-3) = 0(x+3) + \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{4}$.

En 0 : $y = f'(0)(x-0) + f(0) = 0x + 0 = 0$. C'est l'axe des abscisses.

En 1 : $y = f'(1)(x-1) + f(1) = \dfrac{-8}{(-4)^2}(x-1) + \dfrac{1}{-4} =$
$\dfrac{-1}{2}x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{-1}{2}x + \dfrac{1}{4}$.

9. Si la tangente en A est parallèle à la tangente en $x = 1$, alors les coefficients directeurs sont égaux,
soit $f'(x_A) = \dfrac{-3}{8}$; il faut résoudre l'équation $f'(x) = \dfrac{-3}{8}$,
soit $\dfrac{-6x}{(x^2-2x-3)^2} = \dfrac{-3}{8}$ équivaut à
$48x = 3(x^2 - 2x - 3)^2 = 0$ ...

10. Tracé de la courbe C, les asymptotes, et les tangentes citées :



<u>Exercice 2</u> : On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x+1}$.

1. L'ensemble de définition de la fonction f *est* l'ensemble des réels tels que $x + 1 \neq 0$; donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2. Pour tout réel de D_f , on peut écrire $ax + b + \dfrac{c}{x+1} = \dfrac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1} = \dfrac{ax^2+(a+b)x+b+c}{x+1}$. Deux polynômes sont égaux si les coefficients de même degré sont égaux; d'où $a = 1$, $a + b = 2$ et $b + c = -3$; on trouve $a = 1$, $b = 1$ et $c = -4$. Donc $f(x) = x + 1 - \dfrac{4}{x+1}$.

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$; de même $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x} = +\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} (x^2+2x-3) = -4$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} (x+1) = 0^-$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} (x^2+2x-3) = -4$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} (x+1) = 0^+$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = -\infty$.

4. On obtient une asymptote verticale à la courbe C d'équation $x = -1$.

5. Pour montrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe C représentative de f, on détermine la limite $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-(x+1)) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4}{x+1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(x+1)) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4}{x+1} = 0$. Donc la droite d'équation $y = x + 1$ est bien asymptote oblique à la courbe C

6. La dérivée de la fonction f est $f'(x) = \dfrac{(2x+2)(x+1)-(x^2+2x-3)\times 1}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+2x+2x+2-x^2-2x+3}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x+5}{(x+1)^2}$ qui est du signe de $x^2 + 2x + 5$ puisque le dénominateur est un carré. Le discriminant $\Delta = 2^2 - 4\times1\times5 = -16 < 0$, donc il n'y a pas de solution à l'équation et $x^2 + 2x + 5$ est du signe de $a = 1$, donc > 0. Donc la fonction f est croissante sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]-1; +\infty[$.

7. Le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	ǁ	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$		ǁ	$-\infty$ ↗ $+\infty$	

8. La fonction f n'admet pas d'extremum local.

9. Équation des tangentes à la courbe C aux points d'abscisse -3, 0, 1 :

En -3 : $y = f'(-3)(x + 3) + f(-3) = \dfrac{8}{(-2)^2}(x + 3) + 0 = 2x + 6$.

En 0 : $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 5x - 3$.

En 1 : $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = \dfrac{8}{2^2}(x - 1) + 0 = 2x - 2$.

10. Pour déterminer les coordonnées des points d'intersection de C et de l'axe des abscisses, on résout l'équation $f(x) = 0$, soit $\dfrac{x^2+2x-3}{x+1}$ équivaut à $x^2 + 2x - 3 = 0$. Le discriminant $\Delta = 2^2 - 4\times1\times(-3) = 16 = 4^2 > 0$, donc il y a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-2-4}{2} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$.

Il y a deux points d'intersection de C avec l'axe des abscisses $A(-3; 0)$ et $B(1; 0)$.

11. Tracé de la courbe C, les asymptotes, et les tangentes citées :