CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ N° 3 PREMIÈRE ES 3

EXERCICE 1 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-2)^2 - 3$.

1. On peut choisir deux fonctions u et v telles que $u(x) = x - 2$ et $v(x) = x^2 - 3$ et la fonction $f = v \circ u$.
2. On sait que la fonction u est une fonction affine dont le coefficient directeur est 1, donc u est croissante sur $\mathbb{R}$, et v est décroissante sur $]-\infty\,; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$. Par composée, f est décroissante sur $]-\infty\,; 2]$ et croissante sur $[2; +\infty[$.
3. Le tableau de variations de f ci-contre :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

4. La forme développée de la fonction f :
$f(x) = (x-2)^2 - 3 = x^2 - 4x + 4 - 3 = x^2 - 4x + 1$.
5. Résolution de l'équation $f(x) = 0$: on calcule le discriminant : $\Delta = (-4)^2 - 4\times1\times1 = 12 > 0$, donc il y a deux solutions à l'équation :
$x_1 = \dfrac{4-\sqrt{12}}{2} = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2(2-\sqrt{3})}{2} = 2 - \sqrt{3}$ et $x_2 = \dfrac{4+\sqrt{12}}{2} = \dfrac{2(2+\sqrt{3})}{2} = 2 + \sqrt{3}$.
6. Résolution de l'inéquation $f(x) \leqslant 6$: $x^2 - 4x + 1 \leqslant 6$ équivaut à $x^2 - 4x - 5 \leqslant 0$.
On calcule le discriminant : $\Delta = (-4)^2 - 4\times1\times(-5) = 36 = 6^2 > 0$, donc il y a deux solutions à l'équation :
$x_1 = \dfrac{4-6}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{4+6}{2} = 5$. Le polynôme est du signe de a pour les valeurs extérieures aux racines et du signe de $-a$ pour les valeurs entre les racines; ici $a = 1 > 0$, donc $S = [-1; 5]$.

EXERCICE 2 : On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par $g(x) = 2 + \dfrac{7}{x-3}$.

1. On peut choisir deux fonctions u et v telles que $u(x) = x - 3$ et $v(x) = 2 + \dfrac{7}{x}$ et la fonction $g = v \circ u$.
2. On sait que la fonction u est une fonction affine dont le coefficient directeur est 1, donc u est croissante sur $\mathbb{R}$, et v est décroissante sur $]-\infty\,; 0[$ et décroissante sur $]0; +\infty[$ comme fonction associée à la fonction inverse. Par composée, g est décroissante sur $]-\infty\,; 3[$ et décroissante sur $]3; +\infty[$.
3. Le tableau de variations de g ci-contre :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$g(x)$		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	

4. On a pour tout réel x non nul,
$g(x) = 2 + \dfrac{7}{x-3} = \dfrac{2(x-3)+7}{x-3} = \dfrac{2x-6+7}{x-3} = \dfrac{2x+1}{x-3}$.
5. Résolution de l'équation $g(x) = 0$: une fraction est nulle si le numérateur est nul : $2x + 1 = 0$, soit $x = \dfrac{-1}{2}$.
6. Résolution de l'inéquation $g(x) \geqslant 2x + 1$:
$\dfrac{2x+1}{x-3} \geqslant 2x + 1$ équivaut à $\dfrac{2x+1}{x-3} - (2x+1) \geqslant 0$ équivaut à $\dfrac{2x+1-(2x+1)(x-3)}{x-3} \geqslant 0$ équivaut à
$\dfrac{(2x+1)(1-(x-3))}{x-3} \geqslant 0$ équivaut à $\dfrac{(2x+1)(-x+4)}{x-3} \geqslant 0$.
On réalise un tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		3		4		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-x+4$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Q		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

Et la solution est $S = \left]-\infty\,; \dfrac{-1}{2}\right[\cup \,]3; 4]$.

EXERCICE 3 : On considère la fonction h définie sur $\left[\dfrac{5}{2}; +\infty\right[$ par $h(x) = \sqrt{2x-5}$.

1. La fonction u est définie par $u(x) = 2x - 5$ et v est définie par $v(x) = \sqrt{x}$ et la fonction $h = v \circ u$.
2. On sait que la fonction u est une fonction affine dont le coefficient directeur est 2, donc u est croissante sur $\mathbb{R}$, et v est croissante sur $[0; +\infty[$ (vu dans le cours). Par composée, h est croissante sur $\left[\dfrac{5}{2}; +\infty\right[$.

4. Pour x dans $\left[\dfrac{5}{2}; +\infty\right[$, $k(x) = w \circ h(x) = w(h(x)) = w(\sqrt{2x-5}) = (\sqrt{2x-5})^2 + 3 = 2x - 5 + 3 = 2x - 2$ qui est une fonction affine.