CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ N° 3 PREMIÈRE ES 3

EXERCICE 1 : On considère la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = 2x^2 - 2x - 3$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1.La fonction dérivée de la fonction f est $f'(x) = 4x - 2$ qui s'annule pour $x = 0{,}5$.

2. Le signe de f' : négatif sur $]-\infty\ ; 0{,}5]$ et positif sur $[0{,}5; +\infty[$;
le tableau de variations de la fonction f sur ℝ :

x	$-\infty$		0,5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$		↘	$-3{,}5$	↗	

3. La fonction f admet un minimum global égal à $-3{,}5$ atteint en $x = 0{,}5$. Il n'y a pas de maximum sur ℝ.

4. Une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 2 est $y = f'(2)(x-2) + f(2) = 6(x-2) + 1 = 6x - 11$.

5. L'équation $f(x) = 0$ équivaut à $2x^2 - 2x - 3 = 0$. On calcule le discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4\times2\times(-3) = 28 > 0$, donc il y a deux solutions à l'équation : $x_1 = \dfrac{2-\sqrt{28}}{2\times2} = \dfrac{2-2\sqrt{7}}{2\times2} = \dfrac{1-\sqrt{7}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{2+\sqrt{28}}{2\times2} = \dfrac{1-\sqrt{7}}{2}$.

EXERCICE 2 : On considère la fonction f définie sur ℝ \ { $\dfrac{-3}{2}$ } par $f(x) = \dfrac{x-1}{2x+3}$.

1. La fonction f est de la forme $\dfrac{u}{v}$, de dérivée $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.
Donc la dérivée de la fonction f est $f'(x) = \dfrac{1(2x+3)-(x-1)\times2}{(2x+3)^2} = \dfrac{5}{(2x+3)^2}$ qui est strictement positif puisque le numérateur et le dénominateur le sont.

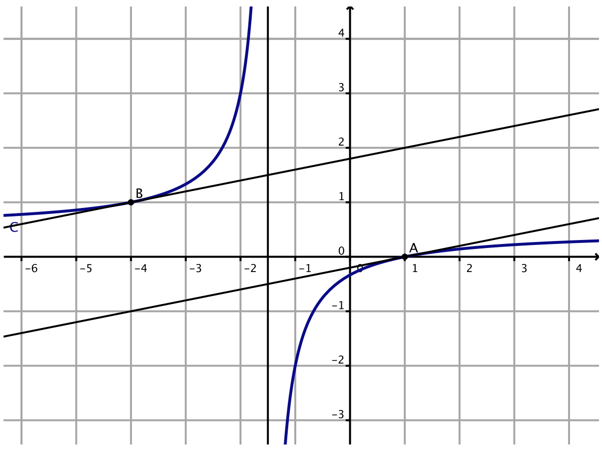
2. Le tableau de variations de la fonction f sur ℝ \ { $\dfrac{-3}{2}$ } :

x	$-\infty$		$\dfrac{-3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$		↗	‖	↗	

3. Pour montrer que les tangentes aux points d'abscisses 1 et -4 sont parallèles, il suffit de montrer qu'elles ont le même coefficient directeur, donc que $f'(1) = f'(-4)$:

$f'(1) = \dfrac{5}{(2\times1+3)^2} = \dfrac{5}{25} = \dfrac{1}{5}$ et

$f'(-4) = \dfrac{5}{(2\times(-4)+3)^2} = \dfrac{5}{(-5)^2} = \dfrac{1}{5}$. Donc $f'(1) = f'(-4)$ et les tangentes aux points d'abscisses 1 et -4 sont bien parallèles. Voir figure ci-contre.



EXERCICE 3 : On considère la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1. La fonction f est de la forme $\dfrac{u}{v}$, de dérivée $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.
Donc la fonction dérivée de f est $f'(x) = \dfrac{(2x+2)(x^2+2)-(x^2+2x+3)(2x)}{(x^2+2)^2} = \dfrac{2x^3+4x+2x^2+4-(2x^3+4x^2+6x)}{(x^2+2)^2} = \dfrac{-2x^2-2x+4}{(x^2+2)^2} = \dfrac{2(-x^2-x+2)}{(x^2+2)^2}$.

2. Le signe de f' est le signe de $-x^2 - x + 2$ car les autres facteurs sont strictement positifs. On calcule le discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4\times(-1)\times2 = 9 = 3^2 > 0$, donc il y a deux solutions à l'équation :
$x_1 = \dfrac{1-3}{2\times(-1)} = 1$ et $x_2 = \dfrac{1+3}{2\times(-1)} = -2$. Le tableau de variations de la fonction f sur ℝ :

3. Les extremums de f sur ℝ : La fonction f admet un minimum global égal à 0,5 atteint en $x = -2$. La fonction f admet un maximum global égal à 2 atteint en $x = 1$.

4. Une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x-0) + f(0) = 1(x-0) + \dfrac{3}{2} = x + \dfrac{3}{2}$.

5. La tangente est parallèle à l'axe des abscisses si $f\,'(a) = 0$. Ici les points de la courbe C où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses sont les points d'abscisses 1 et -2 qui correspondent aux extremums de la fonction.

6. L'équation $f(x) = 1$ équivaut à $\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2} = 1$ équivaut à $x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2$ équivaut à $2x + 1 = 0$ équivaut à $x = \dfrac{-1}{2}$. Donc S = { $\dfrac{-1}{2}$ }.

7. L'inéquation $f(x) \leqslant \dfrac{3}{2}$ équivaut à $\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2} \leqslant \dfrac{3}{2}$ équivaut à $\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2} - \dfrac{3}{2} \leqslant 0$ équivaut à $\dfrac{2(x^2+2x+3)-3(x^2+2)}{2(x^2+2)} \leqslant 0$ équivaut à $\dfrac{-x^2+4x}{2(x^2+2)} \leqslant 0$ équivaut à $\dfrac{x(-x+4)}{2(x^2+2)} \leqslant 0$. Il suffit d'étudier le signe du numérateur puisque le dénominateur est strictement positif.

On réalise un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
$x(-x+4)$		$-$	0		0	$-$	

Donc la solution de l'inéquation est

S = $]-\infty\,;0] \cup [4;+\infty[$.

BONUS : La représentation graphique de la fonction f ci-dessous :