CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ N° 6 PREMIÈRE ES 3

EXERCICE 1 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 8x + 5$ et la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $g(x) = \dfrac{4x-3}{x-1}$.

1. On utilise la propriété : « la limite d'un polynôme en $+\infty$ et en $-\infty$ est la limite du terme de plus haut degré »; d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$; et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.

2. On utilise la propriété : « la limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ et en $-\infty$ est la limite du quotient des termes de plus haut degré »; d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x}{x} = 4$; et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x}{x} = 4$.

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} 4x-3 = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} x-1 = 0^-$, d'où $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} g(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} 4x-3 = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} x-1 = 0^+$, d'où $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} g(x) = +\infty$.

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $h(x) = f(x) \times g(x)$.

a) Pour tout réel x, $(3x - 5)(x - 1) = 3x^2 - 3x - 5x + 5 = 3x^2 - 8x + 5 = f(x)$.

b) Donc $h(x) = f(x) \times g(x) = (3x - 5)(x - 1) \dfrac{4x-3}{x-1} = (3x - 5)(4x - 3)$; d'où $\lim\limits_{x\to1} h(x) = -2$.

En utilisant l'expression $h(x) = f(x) \times g(x) = (3x^2 - 8x + 5) \dfrac{4x-3}{x-1}$, on trouve la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$.

EXERCICE 2 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x^2-5x+4}{x-2}$.

1. L'ensemble de définition de la fonction f est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ puisqu'il faut que $x - 2 \neq 0$.

2. Pour tout réel x de D_f , $2x - 1 + \dfrac{2}{x-2} = \dfrac{(2x-1)(x-2)+2}{x-2} = \dfrac{2x^2-4x-x+2+2}{x-2} = \dfrac{2x^2-5x+4}{x-2} = f(x)$.

3. Les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$; et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{x} = +\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} 2x^2-5x+4 = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} x-2 = 0^-$, d'où $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} 2x^2-5x+4 = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} x-2 = 0^+$, d'où $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x) = +\infty$.

4. On déduit de la question 3 que la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe C.

5. Pour montrer que la droite d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote oblique à la courbe C, on étudie la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(2x-1)) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x-2} = 0$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-(2x-1)) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x-2} = 0$. Donc la droite d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote oblique à la courbe C en $+\infty$ et en $-\infty$.

6. La fonction f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ de dérivée $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$; d'où la dérivée de la fonction f est

$f'(x) = \dfrac{(4x-5)(x-2)-(2x^2-5x+4)}{(x-2)^2} = \dfrac{4x^2-8x-5x+10-2x^2+5x-4}{(x-2)^2} = \dfrac{2x^2-8x+6}{(x-2)^2}$. Le signe de cette dérivée est le signe du numérateur puisque le dénominateur est positif. On calcule le discriminant :

$\Delta = (-8)^2 - 4\times2\times6 = 16 = 4^2 > 0$, donc il y a deux solutions à l'équation :

$x_1 = \dfrac{8-4}{2\times2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{8+4}{2\times2} = 3$.

7. Le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$

8. La fonction f admet un maximum local égal à -1 atteint en $x = 1$ et un minimum local égal à 7 atteint en $x = 3$.

9. Une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 4 est $y = f'(4)(x - 4) + f(4) = \dfrac{3}{2}(x - 4) + 8 = \dfrac{3}{2}x + 2$.

10. Pour déterminer les coordonnées des points d'intersection de C et de l'axe des abscisses, on résout l'équation $f(x) = 0$, soit $2x^2 - 5x + 4 = 0$. On calcule le discriminant : $\Delta = (-5)^2 - 4\times2\times4 = -7 < 0$, donc il n'y a pas de solution, donc pas de points d'intersection de C avec l'axe des abscisses.