CORRIGÉ DEVOIR COMMUN DE PREMIÈRE ES

EXERCICE N°1 : Le gouvernement d'un pays envisage de baisser un impôt de 30% en cinq ans.

Le coefficient multiplicateur pour une baisse de 30% est 0,7. Si on suppose que le pourcentage de baisse est le même chaque année, alors on a $\left(1+\frac{t}{100}\right)^5 = 0{,}70$; soit $\left(1+\frac{t}{100}\right) = \sqrt[5]{0{,}70} \simeq 0{,}931$; d'où une baisse de environ 6,89%.

La première année, cet impôt baisse de 5%, la deuxième année la baisse est de 1% et la troisième année de 3%.

a) Le coefficient multiplicateur correspondant à la baisse de cet impôt au terme de ces trois premières années est égal à $0{,}95 \times 0{,}99 \times 0{,}97 \simeq 0{,}9123$, soit une baisse de 8,77%.

b) Pour atteindre son objectif, le pourcentage annuel t de baisse que doit décider ce gouvernement, en supposant que ce pourcentage est le même sur les deux dernières années vérifie $0{,}9123\left(1+\frac{t}{100}\right)^2 = 0{,}7$; soit $\left(1+\frac{t}{100}\right) = \sqrt[2]{\frac{0{,}70}{0{,}9123}} \simeq 0{,}8759$;

soit $t = -12{,}41$ donc une baisse de environ 12,4%.

EXERCICE N°2 : On considère la fonction f définie sur $[-8\,;\,8]$ par : $f(x) = \frac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$ et C_f, sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.

1. a) La fonction f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ de la forme $\frac{u}{v}$ de dérivée $\frac{u'v-uv'}{v^2}$, soit, pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{(6x+4)(x^2+1)-(3x^2+4x+3)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{6x^3+6x+4x^2+4-(6x^3+8x^2+6x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-4x^2+4}{(x^2+1)^2}.$$

b) Le signe de cette dérivée est le signe de $-4x^2+4$ puisque le dénominateur est strictement positif :

$-4x^2+4 = 4(-x^2+1) = 4(1-x)(1+x)$ qui s'annule en $x = 1$ et $x = -1$, est du signe de $a = -1 < 0$ sur $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]1;+\infty[$ et positif sur $[-1;\,1]$.

c) On obtient alors les variations de f : la fonction est décroissante sur $]-\infty\,;-1[$, croissante sur $[-1;\,1]$ et décroissante sur $]1;+\infty[$.

Le tableau des variations de f :

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$		0		0	
$f(x)$	↘	1	↗	5	↘

2. a) Une équation de la droite D tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0 est donnée par $y = f'(0)(x-0)+f(0) = 4x+3$.

b) Pour tout réel x, on a $f(x)-(4x+3) = \frac{3x^2+4x+3}{x^2+1} - (4x+3) =$

$$\frac{3x^2+4x+3-(4x+3)(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{3x^2+4x+3-(4x^3+4x+3x^2+3)}{x^2+1} = \frac{-4x^3}{x^2+1}.$$

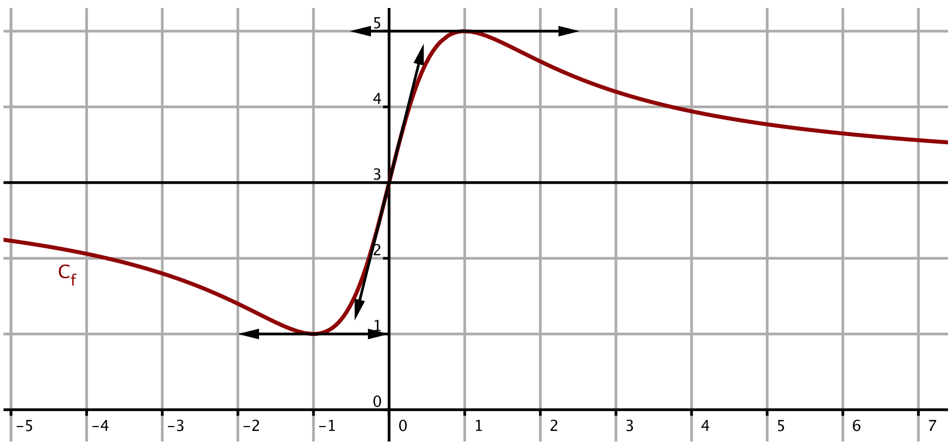
c) Pour étudier la position relative de la courbe C_f et de la droite D, on étudie le signe de la différence $f(x)-(4x+3) = \frac{-4x^3}{x^2+1}$ qui est du signe de $-4x^3$: positif sur $]-\infty\,;\,0]$ et négatif sur $[0;+\infty[$:

donc la courbe C_f est au-dessus de la droite D pour $x \in\,]-\infty\,;\,0]$ et est en-dessous pour $x \in [0;+\infty[$:

Le tableau complété :

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	2,51	2,44	2,35	2,23	2,06	1,8	1,4	1	3	5	4,6	4,2	3,94	3,77	3,65	3,56	3,49

3. Dans le repère orthogonal $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$ tracé de la droite D et de la droite Δ d'équation : $y = 3$, des tangentes aux points de la courbe C_f d'abscisse -1, 0 et 1 et de la courbe C_f :



4. a) Pour tout réel x on a : $\frac{3x^2+4x+3}{x^2+1} - 1$

$$= \frac{3x^2+4x+3-(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{2x^2+4x+2}{x^2+1} = \frac{2(x^2+2x+1)}{x^2+1} = \frac{2(x+1)^2}{x^2+1} \geqslant 0,$$ donc

$\frac{3x^2+4x+3}{x^2+1} - 1 \geqslant 0$, et donc

$\frac{3x^2+4x+3}{x^2+1} \geqslant 1$.

b) Ainsi, pour tout réel x, $f(x) \geqslant 1 > 0$, donc f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

c) On suppose que f est la dérivée d'une fonction F, définie sur $\mathbb{R}$. Comme la dérivée de F qui est f est strictement positive sur $\mathbb{R}$, alors la fonction F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE N°3 QCM :

On considère : - une fonction u définie et dérivable sur l'intervalle $[-2 ; 10]$;

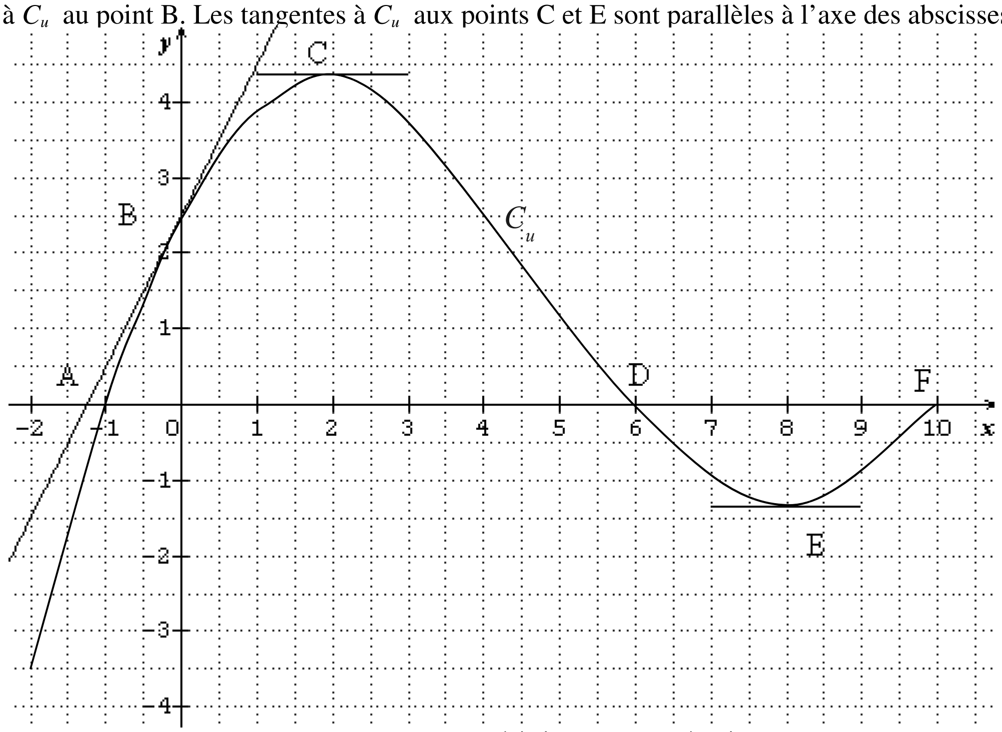
- la fonction composée $g = r \circ u$ où r est la fonction racine carrée

On rappelle que $r \circ u$ est la fonction u suivie de la fonction r et elle est telle que : $r \circ u(x) = r[u(x)]$

Sur la figure ci-dessous, le plan est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. La courbe C_u est la courbe représentative de u.

Les points A(−1 ; 0), B(0 ; 2,5), C(2 ; 4,35), D(6 ; 0), E(8 ; −1,35) et F(10 ; 0) sont des points de C_u .

La droite D est la tangente à C_u au point B. Les tangentes à C_u aux points C et E sont parallèles à l'axe des abscisses.



1. $\Delta = (-5)^2 - 4(-2)(-2) = 25 - 16 = 9 = 3^2$. On a donc 2 racines : $x_1 = \frac{[illegible]}{-4} = -2$, $x_2 = \frac{[illegible]}{-4} = -0{,}5$ (réponse c).

2. $\Delta = (-2)^2 - 4\times0{,}5\times3 = 4 - 6 = -2 < 0$, donc $\forall x \in$ ▪ , $0{,}5x^2 - 2x + 3 > 0$ (car $0{,}5 > 0$) : $S = \varnothing$ (réponse c).

3. La valeur de $u'(0)$ nombre dérivé de u en 0 est égale à 2 car $u'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 de la courbe qui vaut 2. (réponse b).

4. L'ensemble S des solutions de l'équation : $u(x) = 0$ est $S = \{-1 ; 6 ; 10\}$ car La courbe C_u coupe l'axe des abscisses en 3 points d'abscisses −1 ; 6 et 10.(réponse b).

5. L'ensemble S des solutions de l'inéquation : $u(x) < 0$ est $S = [-2 ; -1] \cup [6 ; 10]$ car la courbe C_u se trouve sous l'axe des abscisses sur deux intervalles et l'inégalité étant stricte les valeurs −1 ; 6 et 10 ne sont pas solutions (bornes ouvertes) (réponse b).

6. L'ensemble de définition de la fonction $g = r \circ u$, noté Dg est Dg = $[-1 ; 6] \cup \{10\}$ (réponse a).

7. La valeur de $g(0)$ est $g(0) = \sqrt{u(0)} = \sqrt{2{,}5}$ (réponse a).

8. La fonction u est décroissante sur $[2 ; 6]$ de signe constant sur $[2 ; 8]$; or la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Donc, d'après le théorème sur les variations de composée de fonctions, la fonction $g = r \circ u$ sur l'intervalle $[2 ; 6]$ est décroissante (réponse b).

9. La droite (CE) a pour coefficient directeur : $\frac{y_E - y_C}{x_E - x_C} = \frac{-1{,}35 - 4{,}35}{8-2} = -0{,}95$, donc son équation est du type : $y = -0{,}95x + b$. Or les coordonnées de C doivent vérifier l'équation de (CE) donc : $-1{,}35 = -0{,}95\times8 + b \Leftrightarrow -1{,}35 + 7{,}6 = b \Leftrightarrow b = 6{,}25$. L'équation réduite de la droite (CE) est $y = -0{,}95x + 6{,}25$ (réponse a).

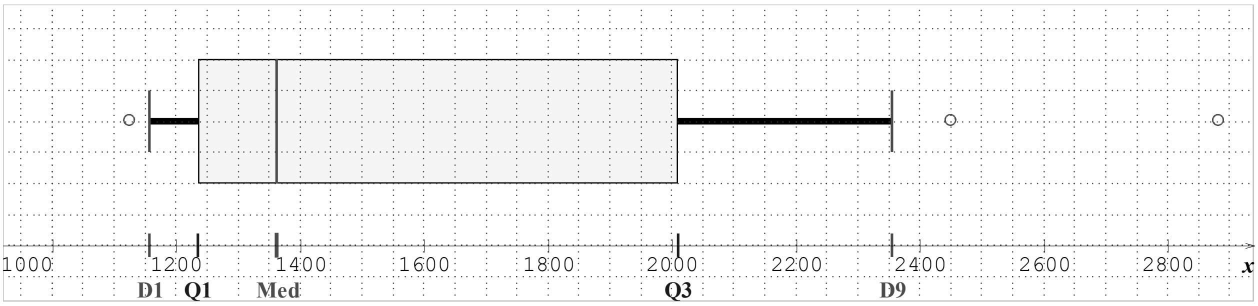
EXERCICE N°4 : PARTIE A

L'effectif total de la série étant de 30 individus, la médiane sera la moyenne des 15ème et 16ème valeurs.
A savoir : (1358 + 1367) ÷2 = 1362,50 €.
La médiane de la série étudiée la partage en 2 sous-séries constituées de 15 individus chacune.

Q_1 est la valeur du caractère du (15 + 1) ÷2 = 8ème individu, à savoir : Q_1 = 1236 €.

Q_3 est la valeur du caractère du 15 + (15 + 1) ÷2 = 23ème individu, à savoir : Q_3 = 2010 €.

L'effectif total de la série étant de 30 individus, 10 % de cet effectif correspond à 3 individus. Donc, le 1er décile est la valeur du 3ème individu : D_1 = 1157 € et le 9ème décile est la valeur du 27ème individu : D_9 = 2355 €.



D'après la formule du cours : $\overline{x} = \dfrac{1}{30}(1125\times1 + 1157\times2 + \ldots + 2450\times2 + 2882\times1) = \dfrac{47825}{30} \approx 1594$ €.

$V = \dfrac{1}{30}\sum_{i=1}^{i=19} n_i(x_i-\overline{x})^2 = [1\times(1125-\overline{x})^2 + 2\times(1157-\overline{x})^2 + \ldots + 2\times(2450-\overline{x})^2 + 2\times(2882-\overline{x})^2] \approx \dfrac{6949594}{30} \approx 231653{,}13$.

D'où l'écart-type vaut $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{231653{,}13} \approx 481{,}3$. A l'euro près $\sigma = 481$€.

$[\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma]$ = [1594 – 481 ; 1594 + 481] = [1113 ; 2075]. 25 salariés ont le salaire situé dans cet intervalle, ce qui représente 25÷30×100 ≈ 83,3 % de la population.

PARTIE B :

1.

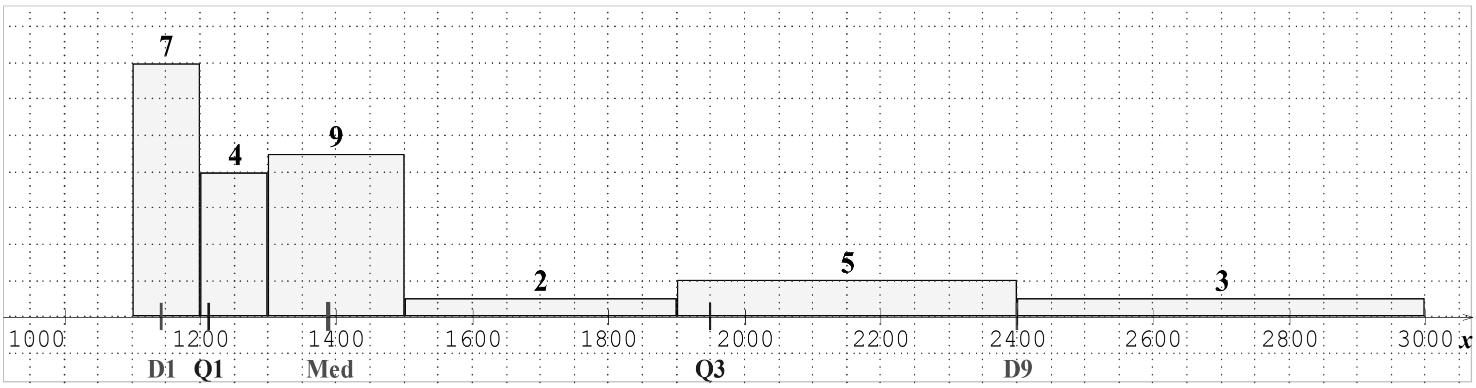
Salaires regroupés par classes	[1100 ; 1200[	[1200 ; 1300[	[1300 ; 1500[	[1500 ; 1900[	[1900 ; 2400[	[2400 ; 3000[
Effectifs	7	4	9	2	5	3

2. Pour ce nouveau calcul de moyenne de cette série classée on utilise les valeurs centrales de chacune de ces classes, à savoir respectivement : 1150 ; 1250 ; 1400 ; 1700 ; 2150 ; 2700. On a donc :

$\overline{x'} = \dfrac{1}{30}(1150\times7 + 1250\times4 + 1400\times9 + 1700\times2 + 2150\times5 + 2700\times3) = \dfrac{47900}{30} \approx 1597$ €.

3. Les 2 moyennes diffèrent d'1 €. On a donc une erreur de 1÷1596×100 ≈ 0.06 %. C'est négligeable !

4.



L'intervalle unitaire est d'amplitude 100 €. Il suffit de diviser l'effectif de chaque intervalle par le nombre d' intervalle(s) unitaire(s) qui constitue(nt) son amplitude. Ainsi, pour le 1er intervalle : 7÷1 = 7, pour le 2ème intervalle : 4÷1 = 4, pour le 3ème intervalle : 9÷2 = 4,5, pour le 4ème intervalle : 2÷4 = 0,5, pour le 5ème intervalle : 5÷5 = 1 et enfin pour le 6ème et dernier intervalle : 3÷6 = 0,5.