DEVOIR MAISON N° 10 PREMIÈRE S 1 *Avril 2010*

On considère le repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$), et les points A(– 1; 4) , B(2; – 3) et C(4; 6).
Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC, les coordonnées du centre R du cercle circonscrit au triangle ABC et les coordonnées de l'orthocentre H de ABC.
Montrer que les points G, H et R sont alignés.

CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 10 PREMIÈRE S 1

1. Pour déterminer les coordonnées du centre de gravité G, on détermine les équations de deux médianes du triangle; notons A' le milieu de [BC], B' le milieu de [AC] et C' le milieu de [AB].
Leurs coordonnées sont A'(3; 1,5), B'(1,5; 5) et C'(0,5; 0,5).
Équation de la médiane (AA') : un vecteur directeur est $\overrightarrow{AA'}$ (4; – 2,5); donc l'équation s'écrit 2,5x + 4y + c = 0; pour déterminer c, on remplace x et y par les coordonnées de A : – 2,5 + 16 + c = 0, soit c = – 13,5.
Donc une équation cartésienne de la médiane (AA') est : 2,5x + 4y – 13,5 = 0.
Équation de la médiane (BB') : un vecteur directeur est $\overrightarrow{BB'}$ (– 0,5; 8); donc l'équation s'écrit 8x + 0,5y + c = 0; pour déterminer c, on remplace x et y par les coordonnées de B : 16 – 1,5 + c = 0, soit c = – 14,5.
Donc une équation cartésienne de la médiane (BB') est : 8x + 0,5y – 14,5 = 0.
Les coordonnées de G vérifient le système :

$$\begin{cases} 2,5x+4y=13,5 \\ 8x+0,5y=14,5 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 2,5x+4y=13,5 \\ 64x+4y=116 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 2,5x+4y=13,5 \\ 61,5x=102,5 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x=\dfrac{102,5}{61,5} \\ 2,5x+4y=13,5 \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} x=\dfrac{5}{3} \\ 4y=13,5-2,5x \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x=\dfrac{5}{3} \\ y=\dfrac{7}{3} \end{cases}. \text{ G}\left(\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right).$$

2. Pour déterminer les coordonnées de l'orthocentre H, on détermine les équations de deux hauteurs du triangle;
Équation de la hauteur issue de A : un vecteur normal est $\overrightarrow{BC}$ (2; 9); donc l'équation s'écrit 2x + 9y + c = 0; pour déterminer c, on remplace x et y par les coordonnées de A : – 2 + 36 + c = 0, soit c = – 34.
Donc une équation cartésienne de la hauteur issue de A est : 2x + 9y – 34 = 0.
Équation de la hauteur issue de B : un vecteur normal est $\overrightarrow{AC}$ (5; 2); donc l'équation s'écrit 5x + 2y + c = 0; pour déterminer c, on remplace x et y par les coordonnées de B : 10 – 6 + c = 0, soit c = – 4.

Donc une équation cartésienne de la hauteur issue de B est : 5x + 2y – 4 = 0.
Les coordonnées de H vérifient le système :

$$\begin{cases} 2x+9y=34 \\ 5x+2y=4 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 10x+45y=170 \\ 10x+4y=8 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 2x+9y=34 \\ 41y=162 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 2x=-9y+34 \\ y=\dfrac{162}{41} \end{cases} \text{ équivaut à}$$

$$\begin{cases} 2x=\dfrac{-1458}{41}+34 \\ y=\dfrac{162}{41} \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x=\dfrac{-32}{41} \\ y=\dfrac{162}{41} \end{cases}. \text{ H}\left(\frac{-32}{41};\frac{162}{41}\right).$$

3. Pour déterminer les coordonnées du centre R du cercle circonscrit au triangle ABC, on détermine les équations de deux médiatrices de côtés du triangle;
Équation de la médiatrice de [AB] : un vecteur normal est $\overrightarrow{AB}$ (3; – 7); donc l'équation s'écrit 3x – 7y + c = 0; pour déterminer c, on remplace x et y par les coordonnées de C' : 1,5 – 3,5 + c = 0, soit c = 2.
Donc une équation cartésienne de la la médiatrice de [AB] est : 3x – 7y + 2 = 0.
Équation de la médiatrice de [AC] : un vecteur normal est $\overrightarrow{AC}$ (5; 2); donc l'équation s'écrit 5x + 2y + c = 0; pour déterminer c, on remplace x et y par les coordonnées de B' : 7,5 + 10 + c = 0, soit c = – 17,5.
Donc une équation cartésienne de la la médiatrice de [AB] est : 5x + 2y – 17,5 = 0.

Les coordonnées de R vérifient le système :

$\begin{cases} 3x-7y=-2 \\ 5x+2y=17{,}5 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 6x-14y=-4 \\ 35x+14y=122{,}5 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 3x-7y=-2 \\ 41x=118{,}5 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 7y=3x+2 \\ x=\dfrac{118{,}5}{41} \end{cases}$ équivaut à

$\begin{cases} 7y=\dfrac{355{,}5}{41}+2 \\ x=\dfrac{118{,}5}{41} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=\dfrac{237}{82} \\ y=\dfrac{125}{82} \end{cases}$. R $\left(\dfrac{237}{82};\dfrac{125}{82}\right)$.

Pour montrer que les points G, H et R sont alignés, on utilise la colinéarité des vecteurs :

$\overrightarrow{GH}\left(\dfrac{-32}{41}-\dfrac{5}{3};\dfrac{162}{41}-\dfrac{7}{3}\right)$, soit $\overrightarrow{GH}\left(\dfrac{-301}{123};\dfrac{199}{123}\right)$;

$\overrightarrow{GR}\left(\dfrac{237}{82}-\dfrac{5}{3};\dfrac{125}{82}-\dfrac{7}{3}\right)$, soit $\overrightarrow{GR}\left(\dfrac{301}{246};-\dfrac{199}{246}\right)$;

on voit que $\overrightarrow{GH}=-2\ \overrightarrow{GR}$, donc les vecteurs sont colinéaires, et les points G, H et R sont alignés.