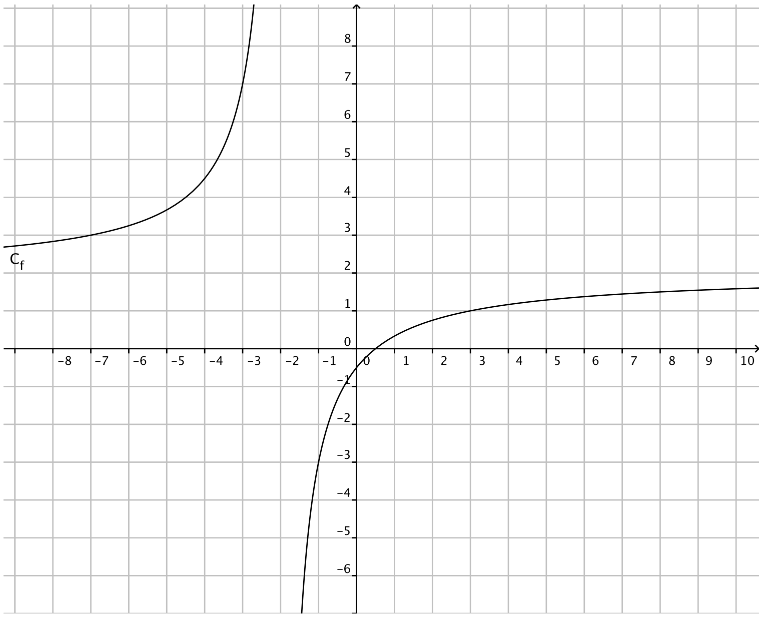
EXERCICE 1 : On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 1$ et $g(x) = 4x^3 - 3x$.
On a, pour tout réel x, $f \circ g\ (x) = f(\ 4x^3 - 3x) = 2(\ 4x^3 - 3x)^2 - 1 = 2(16x^6 - 24x^4 + 9x^2\ ) - 1 = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$
et $g \circ f\ (x) = g(2x^2 - 1) = 4(\ 2x^2 - 1)^3 - 3(\ 2x^2 - 1) = 4(8x^6 - 12x^4 + 6x^2 - 1) - 6x^2 + 3 = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$.
Donc, on obtient bien $f \circ g = g \circ f$.

EXERCICE 2
On considère les fonctions affines f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ et $g(x) = cx + d$ avec a et c non nuls .
1. On a, pour tout réel x, $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = ax + b + cx + d = (\mathrm{a} + c)x + b + d$ qui est une fonction affine;
$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = ax + b - (cx + d) = (\mathrm{a} - c)x + b - d$ qui est une fonction affine.
$(f \circ g)(x) = f(\mathrm{g}(x)) = f(cx + d) = a(cx + d) + b = acx + ad + b$ qui est une fonction affine.

2. Pour la fonction fg : $(fg)(x) = (ax + b)(cx + d) = acx^2 + adx + bcx + bd = acx^2 + (ad + bc)x + bd$ qui est un polynôme de degré 2.
3. On a, pour tout réel x, $f \circ f\ (x) = f(ax + b) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b = x$; deux polynômes sont égaux si et seulement si les coefficients des termes de même degré sont égaux; soit $a^2 = 1$ et $ab + b = 0$;
soit $a = 1$ ou $a = -1$ et $ab + b = b(a + 1) = 0$; un produit de facteurs est nuls si l'un des facteurs est nul:
$b = 0$ ou $a = -1$. Ainsi, on peut avoir $a = 1$ et $b = 0$, soit $f(x) = x$,
ou bien $a = -1$ et b est quelconque, soit $f(x) = -x + b$.

EXERCICE 3 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$.



1. a) Tracé de la courbe représentative de la fonction f :
b) On conjecture que, pour $x > -2$, un majorant de f est 2.
c) On conjecture que la fonction f est croissante sur $]-\infty\ ; -2\ [$ et croissante sur $]-2;\ +\infty\ [$.
2. a) Pour déterminer les deux réels a et b tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{x+2}$, on met au même dénominateur :
$a + \dfrac{b}{x+2} = \dfrac{a(x+2)+b}{x+2} = \dfrac{ax+2a+b}{x+2} = \dfrac{2x-1}{x+2}$. Les dénominateurs sont identiques, donc les numérateurs doivent être égaux; deux polynômes sont égaux si et seulement si les coefficients des termes de même degré sont égaux; soit $a = 2$ et $2a + b = -1$; on trouve $a = 2$ et $b = -5$. Ainsi $f(x) = 2 + \dfrac{-5}{x+2}$.
b) On considère deux réels a et b sur $]-2\ ; +\infty\ [$ avec $-2 < a < b$; on ajoute 2 : $0 < a + 2 < b + 2$; on passe à l'inverse : $\dfrac{1}{a+2} > \dfrac{1}{b+2}$; on multiplie par -5 : $\dfrac{-5}{a+2} < \dfrac{-5}{b+2}$; on ajoute 2 : $2 + \dfrac{-5}{a+2} < 2 + \dfrac{-5}{b+2}$; donc $f(a) < f(b)$; l'ordre est conservé, donc la fonction f est croissante sur $]-2\ ; +\infty\ [$.

c) Pour $x > -2$, on a $x + 2 > 0$, soit $\dfrac{1}{x+2} > 0$, soit $\dfrac{-5}{x+2} < 0$, soit $2 + \dfrac{-5}{x+2} < 2$, soit $f(x) < 2$. Donc, un majorant de la fonction f pour $x > -2$, est 2.