CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 4 PREMIÈRE S 1

EXERCICE 1

On considère le tétraèdre ABCD; I est le milieu de l'arête [AD], et G est le centre de gravité du triangle ABC.

1. On sait que $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$, et $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

On se place dans le repère (A; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$). On a $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, donc G($\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; 0) et

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, donc I(0; 0; $\frac{1}{2}$). Ainsi $\overrightarrow{BC}$ (– 1; 1; 0), $\overrightarrow{BD}$ (– 1; 0; 1) et $\overrightarrow{IG}$ ($\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{-1}{2}$). On cherche s'il existe des réels a et b tels que $\overrightarrow{IG} = a\,\overrightarrow{BC} + b\,\overrightarrow{BD}$, soit

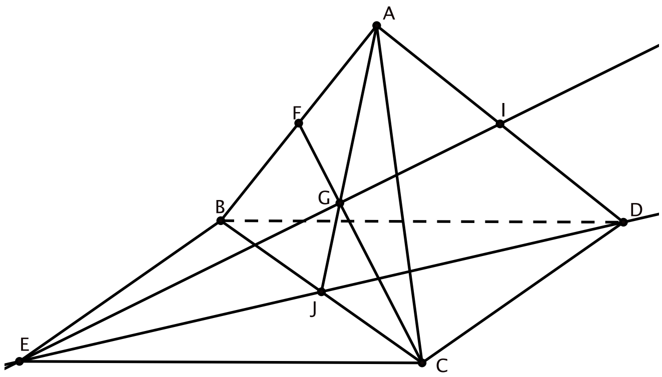
$-a-b = \frac{1}{3}$, $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{-1}{2}$; ce qui est impossible, donc les vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{IG}$ ne sont pas coplanaires.

2. Comme les vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{IG}$ ne sont pas coplanaires, la droite (IG) n'est pas parallèle au plan (BCD), donc elle coupe ce plan.

Soit J le milieu de [BC] de coordonnées J($\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 0).

G est sur la médiane (AJ), I est le milieu de [AD], donc la droite (GI) est dans le plan (ADJ). Les droites (GI) et (DJ) ne sont pas parallèles, donc elles se coupent en un point E.

Ainsi, la droite (IG) coupe le plan (BCD) en E.



3. On sait qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{IE} = k\,\overrightarrow{IG}$;
d'où les coordonnées de E vérifient

$x_E = \frac{1}{3}k$, $y_E = \frac{1}{3}k$, $z_E = \frac{-1}{2}k + \frac{1}{2}$;

et il existe un réel k' tel que $\overrightarrow{DE} = k'\,\overrightarrow{DJ} = k'(\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; – 1); d'où les coordonnées de E vérifient aussi

$x_E = \frac{1}{2}k'$, $y_E = \frac{1}{2}k'$, $z_E = -k' + 1$; donc $\frac{1}{3}k = \frac{1}{2}k'$, et $\frac{-1}{2}k + \frac{1}{2} = -k' + 1$, soit $k = \frac{3}{2}k'$, et $k = 2k' - 1$; on trouve $k = 3$ et $k' = 2$. Ainsi E(1; 1; – 1).

Ainsi $\overrightarrow{BE}$ (0; 1; – 1) et $\overrightarrow{DC}$ (0; 1; – 1); donc $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$ et BDCE est un parallélogramme.

EXERCICE 2 : On considère l'espace muni du repère (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) et les quatre points A(1; 1; 1), B(– 2; 4; 1), C(5; 1; 3) et D(2; – 1; 2).

1. Les coordonnées des points I et J milieux respectifs des segments [AD] et [BC] : I($\frac{3}{2}$; 0; $\frac{3}{2}$) et J($\frac{3}{2}$; $\frac{5}{2}$; 2).

2. On considère le réel x et les points M, N, P et Q définis par $\overrightarrow{BM} = x\,\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BQ} = x\,\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CN} = x\,\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CP} = x\,\overrightarrow{CD}$.

a) On a $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BQ} = -x\,\overrightarrow{BA} + x\,\overrightarrow{BD} = x\,\overrightarrow{AB} + x\,\overrightarrow{BD} = x\,\overrightarrow{AD}$;
et $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP} = -x\,\overrightarrow{CA} + x\,\overrightarrow{CD} = x\,\overrightarrow{AC} + x\,\overrightarrow{CD} = x\,\overrightarrow{AD}$;
Donc, pour tout réel x, $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$ et le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.

b) Le centre R de ce parallélogramme est le milieu des diagonales [MP] et [NQ]. On a $\overrightarrow{BA}$ (3; – 3; 0), donc $\overrightarrow{BM}$ ($3x$; $-3x$; 0); d'où M($3x - 2$; $-3x + 4$; 1); de la même manière, on trouve N($-4x + 5$; 1; $-2x + 3$); P($-3x + 5$; $-2x + 1$; $-x + 3$); Q($4x - 2$; $-5x + 4$; $x + 1$).

d'où R($\frac{3}{2}$; $\frac{-5x+5}{2}$; $\frac{-x}{2} + 2$).

c) On a $\overrightarrow{IJ}$ (0; $\frac{5}{2}$; $\frac{1}{2}$); $\overrightarrow{IR}$ (0; $\frac{-5x+5}{2}$; $\frac{-x+1}{2}$). On obtient $\overrightarrow{IR} = (-x + 1)\,\overrightarrow{IJ}$; donc, pour tout réel x, ces deux vecteurs sont colinéaires, et les points I, J et R sont alignés.