EXERCICE 1 : 1. On considère la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = x^2$ et P sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan.

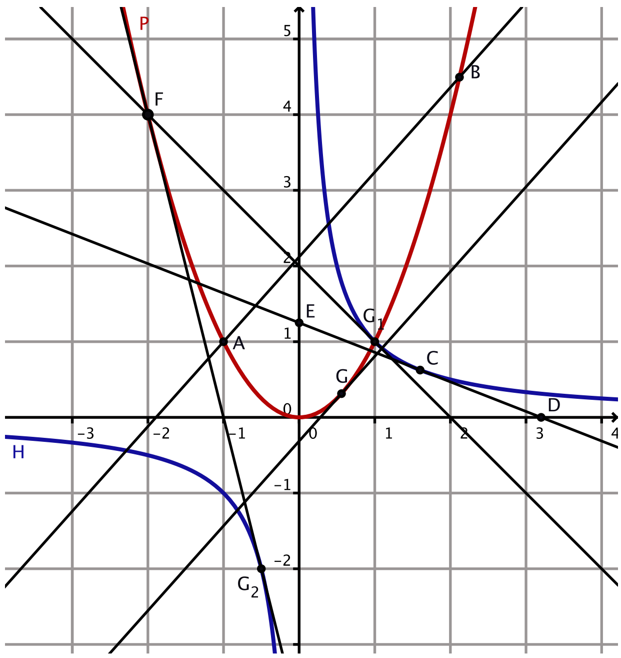
a) Soit A et B deux points distincts de P d'abscisses respectives a et b . Le coefficient directeur de la droite (AB) est égal à $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{(b-a)(b+a)}{b-a} = b + a$.

b) L'abscisse x_0 du point de P en lequel la tangente est parallèle à la droite (AB) vérifie $f'(x_0) = b + a$ puisque deux droites sont parallèles si elles ont le même coefficient directeur. Or $f'(x_0) = 2x_0 = b + a$ d'où $x_0 = \frac{b+a}{2}$.

2. On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{a}{x}$ où a est un réel strictement positif et H sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan. La fonction dérivée de h est $h'(x) = \frac{-a}{x^2}$.

a) Une équation de la tangente (d) à H en C d'abscisse c et d'ordonnée $h(c) = \frac{a}{c}$ est donnée par

$y = h'(c)(x - c) + h(c) = \frac{-a}{c^2}(x - c) + \frac{a}{c} = \frac{-a}{c^2}x + \frac{2a}{c}$.

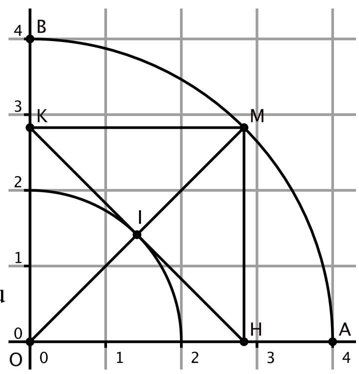


b) Soit D le point d'intersection de (d) avec l'axe des abscisses. Alors, x_D vérifie l'équation $0 = \frac{-a}{c^2}x_D + \frac{2a}{c}$, soit $\frac{a}{c^2}x_D = \frac{2a}{c}$, soit $x_D = 2c$. Et D(2c; 0). Soit E le point d'intersection de (d) avec l'axe des ordonnées. Alors, y_E vérifie l'équation $y_E = \frac{-a}{c^2}0 + \frac{2a}{c} = \frac{2a}{c}$, et E(0 ; $\frac{2a}{c}$). Le milieu du segment [DE] a pour coordonnées ($\frac{x_D+x_E}{2}$; $\frac{y_D+y_E}{2}$). On trouve $\frac{x_D+x_E}{2} = c$ et $\frac{y_D+y_E}{2} = \frac{a}{c}$ qui sont bien les coordonnées de C. Donc, pour tout réel c strictement positif, le point C est le milieu du segment [DE].

Le point D est sur l'axe des abscisses et E sur l'axe des ordonnées, donc le triangle ODE est rectangle en O. Son aire est égale à $\frac{\text{OD}\times\text{OE}}{2} = \frac{x_D \times y_E}{2} = \frac{2c\times 2a/c}{2} = 2a$ qui est indépendante de c .

3. Soit F le point de P d'abscisse – 2 et d'ordonnée 4. Une équation de la tangente (d) à H au point G d'abscisse c est $y = \frac{-a}{c^2}x + \frac{2a}{c}$. Les coordonnées de F vérifient cette équation, soit $4 = \frac{-a}{c^2}(-2) + \frac{2a}{c}$, soit $4 = \frac{2a}{c^2} + \frac{2a}{c}$ soit $4 = \frac{2a+2ac}{c^2}$, soit $4c^2 = 2a + 2ac$, soit $2c^2 - ac - a = 0$. Le discriminant $\Delta = (-a)^2 - 4\times 2(-a) = a^2 + 8a > 0$, donc il y a deux solutions : $c_1 = \frac{a+\sqrt{a^2+8a}}{4}$ et $c_2 = \frac{a-\sqrt{a^2+8a}}{4}$. Si $a = 1$, on trouve $c_1 = 1$ et $c_2 = \frac{-1}{2}$.

EXERCICE 2



1. Le quadrilatère OHMK est un rectangle: (HM) ⊥ (OH) et (OK) ⊥ (OH), donc (HM) // (OK); (KM) ⊥ (OK) et (OH) ⊥ (OK), donc (KM) // (OH). Les côtés opposés sont parallèles et les côtés adjacents sont perpendiculaires.

3. Le point I se déplace sur le quart de cercle de centre O et de rayon 2. En effet, comme OHMK est un rectangle, les diagonales se coupent en leur milieu, donc I est aussi le milieu de [OM]; donc I se déplace sur une courbe similaire à celle de M mais de rayon la moitié de OM.

4. La position du point I pour que la droite (HK) soit tangente à la courbe obtenue est pour I($\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$). En effet, la tangente au quart de cercle est perpendiculaire au rayon [OI], ce qui est réalisé lorsque les diagonales [OM] et [HK] sont perpendiculaires, soit lorsque OHMK est un carré de diagonale 4, soit de côté $2\sqrt{2}$, donc $x_I = y_I = \sqrt{2}$.