CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 6 PREMIÈRE S 1

EXERCICE 1 : On considère un rectangle de 5 cm par 8 cm dans lequel on découpe quatre carrés de même dimension aux quatre coins comme sur la figure ci-contre; on plie suivant les pointillés pour obtenir une boîte parallélépipédique sans couvercle .
On note x le côté du carré coupé; ce côté ne peut pas dépasser la moitié de la largeur du rectangle, soit 2,5 donc $x \in [0; 2,5]$.
Dans ce cas le fond de la boîte est un rectangle de longueur $L = 8 - 2x$ et de largeur $l = 5 - 2x$; la hauteur de la boîte est x; son volume est donc $V(x) = L \times l \times x = (8 - 2x)(5 - 2x)x = 4x^3 - 26x^2 + 40x$.
1. On cherche le volume maximal; pour cela, on étudie les variations de la fonction V sur [0; 2,5].
V est un polynôme de degré 3, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et $V'(x) = 12x^2 - 52x + 40 = 4(3x^2 - 13x + 10)$. On cherche les valeurs qui annulent cette dérivée : Le discriminant $\Delta = (-13)^2 - 4\times3\times10 = 49 = 7^2 > 0$, donc il y a deux solutions : $x_1 = \frac{13+7}{2\times3} = \frac{10}{3}$ et $x_2 = \frac{13-7}{2\times3} = 1$.

x	$-\infty$	0	1	2,5	$\frac{10}{3}$	$+\infty$
$V'(x)$	+		0	−	0	+
$V(x)$	↗	0	18	↘ 0	$\frac{-200}{27}$	↗

On obtient le tableau de variations de V :
Sur l'intervalle [0; 2,5], le maximum du volume de la boîte est
égal à 18 cm^3 atteint en $x = 1$.
2. Le volume peut être égal à 15 cm^3 , puisque ce volume varie entre 0 et 18, son maximum. Pour trouver le côté du carré donnant ce volume, on résout l'équation $V(x) = 15$,
soit $4x^3 - 26x^2 + 40x = 15$, soit $4x^3 - 26x^2 + 40x - 15 = 0$.
On trouve une racine : 1,5 ; on peut donc factoriser le polynôme $4x^3 - 26x^2 + 40x - 15$ par $(x - 1,5)$: $V(x) = (x - 1,5)(ax^2 + bx + c)$. On développe :
$V(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1,5ax^2 - 1,5bx - 1,5c = ax^3 + (b - 1,5a)x^2 + (c - 1,5b)x - 1,5c$. Par identification, on trouve $a = 4$, $b - 1,5a = -26$, $c - 1,5b = 40$ et $-1,5c = -15$; on trouve $a = 4$, $b = -20$ et $c = 10$.
On résout l'équation $4x^2 - 20x + 10 = 0$: Le discriminant $\Delta = (-20)^2 - 4\times4\times10 = 240 > 0$, donc il y a deux solutions : $x_1 = \frac{20+\sqrt{240}}{2\times4} = \frac{20+4\sqrt{15}}{2\times4} = \frac{5+\sqrt{15}}{2}$ et $x_2 = \frac{20-\sqrt{240}}{2\times4} = \frac{5-\sqrt{15}}{2}$.
Seule la solution $x_2 = \frac{5-\sqrt{15}}{2} \simeq 0,56$ est dans l'intervalle [0; 2,5]. Donc le volume de la boîte est égal à 15 cm^3 lorsque $x = 1,5$ cm ou $x = \frac{5-\sqrt{15}}{2} \simeq 0,56$ cm.

EXERCICE 2 : M. Martin souhaite construire un abri sur le devant de sa maison autour de la porte d'entrée avec trois planches de 50 cm de large et de 5 m de long. Il veut que le volume de cet abri soit égal à 4 m^3.
1. On suppose que la largeur de l'abri est égale à 50 cm (largeur des planches). Soit h la hauteur de l'abri et L sa largeur. Le volume (en m^3) de l'abri qui est un parallélépipède rectangle est égal à $L\times h\times0,5 = 4$, donc $L = \frac{8}{h}$.
L'aire de la surface de planches nécessaires à la construction de l'abri est égale à
$2\times0,5\times h + L\times0,5 = h + \frac{8}{h}\times0,5 = h + \frac{4}{h}$.
2. Pour trouver l'aire minimale et la longueur de planches utilisée, on étudie les variations de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(h) = h + \frac{4}{h}$. Elle est dérivable sur cet intervalle, et $f'(h) = 1 - \frac{4}{h^2} = \frac{h^2-4}{h^2} = \frac{(h+2)(h-2)}{h^2}$
qui est du signe du numérateur qui s'annule en 2 et -2.

h	0		2		$+\infty$
$f'(h)$		−	0	+	
$f(h)$	‖	↘	4	↗	

Le tableau de variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$ est :
L'aire minimale est égale à 4 m^2 atteinte lorsque $h = 2$ m;
dans ce cas, L = 4 m.
3. La longueur des deux planches verticales est 2m et la longueur de la planche horizontale est 4m.
4. Il reste une planche de 1m et soit 2 planches de 3 m, soit une planche entière et une planche de 1m (suivant la découpe).

L'autre abri de même forme avec le reste de planches peut être réalisé de deux façons :
L = 1 et $h = 3$, d'où le volume = 1,5 m^3 ; ou L = 5 et $h = 1$, d'où le volume = 2,5 m^3 . La deuxième solution donne le volume maximal de cet autre abri parallélépipédique.