## CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 6

## PREMIÈRE S 1

<u>EXERCICE 1</u>: On considère un rectangle de 5 cm par 8 cm dans lequel on découpe quatre carrés de même dimension aux quatre coins comme sur la figure ci-contre; on plie suivant les pointillés pour obtenir une boîte parallélépipédique sans couvercle.

On note x le côté du carré coupé; ce côté ne peut pas dépasser la moitié de la largeur du rectangle, soit 2,5 donc  $x \in [0; 2,5]$ .

Dans ce cas le fond de la boîte est un rectangle de longueur L = 8 - 2x et de largeur l = 5 - 2x; la hauteur de la boîte est x; son volume est donc  $V(x) = L \times l \times x = (8 - 2x)(5 - 2x)x = 4x^3 - 26x^2 + 40x$ .

1. On cherche le volume maximal; pour cela, on étudie les variations de la fonction V sur [0; 2,5].

V est un polynôme de degré 3, donc dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et V '(x) =  $12x^2 - 52x + 40 = 4(3x^2 - 13x + 10)$ . On cherche les valeurs qui annulent cette dérivée : Le discriminant  $\Delta = (-13)^2 - 4 \times 3 \times 10 = 49 = 7^2 > 0$ , donc il y a deux

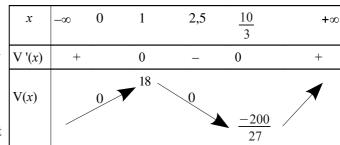
solutions: 
$$x_1 = \frac{13+7}{2\times 3} = \frac{10}{3}$$
 et  $x_2 = \frac{13-7}{2\times 3} = 1$ .

On obtient le tableau de variations de V :

Sur l'intervalle [0; 2,5], le maximum du volume de la boîte est

égal à 18 cm<sup>3</sup> atteint en x = 1.

2. Le volume peut être égal à 15 cm³, puisque ce volume varie entre 0 et 18, son maximum. Pour trouver le côté du carré donnant ce volume, on résout l'équation V(x) = 15,



soit 
$$4x^3 - 26x^2 + 40x = 15$$
, soit  $4x^3 - 26x^2 + 40x - 15 = 0$ .

On trouve une racine : 1,5 ; on peut donc factoriser le polynôme  $4x^3 - 26x^2 + 40x - 15$  par (x - 1,5) :  $V(x) = (x - 1,5)(ax^2 + bx + c)$ . On développe :

 $V(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1.5ax^2 - 1.5bx - 1.5c = ax^3 + (b - 1.5a)x^2 + (c - 1.5b)x - 1.5c$ . Par identification, on trouve a = 4, b - 1.5a = -26, c - 1.5b = 40 et -1.5c = -15; on trouve a = 4, b = -20 et c = 10.

On résout l'équation  $4x^2 - 20x + 10 = 0$ : Le discriminant  $\Delta = (-20)^2 - 4 \times 4 \times 10 = 240 > 0$ , donc il y a deux solutions :  $x_1 = \frac{20 + \sqrt{240}}{2 \times 4} = \frac{20 + 4\sqrt{15}}{2 \times 4} = \frac{5 + \sqrt{15}}{2}$  et  $x_2 = \frac{20 - \sqrt{240}}{2 \times 4} = \frac{5 - \sqrt{15}}{2}$ .

Seule la solution  $x_2 = \frac{5-\sqrt{15}}{2} \simeq 0,56$  est dans l'intervalle [0; 2,5]. Donc le volume de la boîte est égal à 15 cm<sup>3</sup> lorsque x = 1,5 cm ou  $x = \frac{5-\sqrt{15}}{2} \simeq 0,56$  cm.

EXERCICE 2: M. Martin souhaite construire un abri sur le devant de sa maison autour de la porte d'entrée avec trois planches de 50 cm de large et de 5 m de long. Il veut que le volume de cet abri soit égal à 4 m³.

1. On suppose que la largeur de l'abri est égale à 50 cm (largeur des planches). Soit h la hauteur de l'abri et L sa

largeur. Le volume (en m³) de l'abri qui est un parallélépipède rectangle est égal à L×h×0,5 = 4, donc L =  $\frac{8}{h}$ .

L'aire de la surface de planches nécessaires à la construction de l'abri est égale à

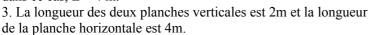
$$2 \times 0.5 \times h + L \times 0.5 = h + \frac{8}{h} \times 0.5 = h + \frac{4}{h}$$
.

2. Pour trouver l'aire minimale et la longueur de planches utilisée, on étudie les variations de la fonction f définie  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = \frac{h^2 - 4}{2} = \frac{(h+2)(h-2)}{2}$ 

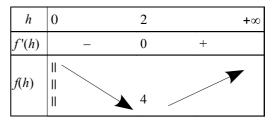
sur ]0;  $+\infty$  [ par  $f(h) = h + \frac{4}{h}$ . Elle est dérivable sur cet intervalle, et  $f'(h) = 1 - \frac{4}{h^2} = \frac{h^2 - 4}{h^2} = \frac{(h+2)(h-2)}{h^2}$ 

qui est du signe du numérateur qui s'annule en 2 et -2.

Le tableau de variations de la fonction f sur  $]0; +\infty[$  est : L'aire minimale est égale à 4 m² atteinte lorsque h = 2 m; dans ce cas, L = 4 m.



4. Il reste une planche de 1m et soit 2 planches de 3 m, soit une planche entière et une planche de 1m (suivant la découpe).



L'autre abri de même forme avec le reste de planches peut être réalisé de deux façons :

L = 1 et h = 3, d'où le volume = 1,5 m<sup>3</sup>; ou L = 5 et h = 1, d'où le volume = 2,5 m<sup>3</sup>. La deuxième solution donne le volume maximal de cet autre abri parallélépipédique.