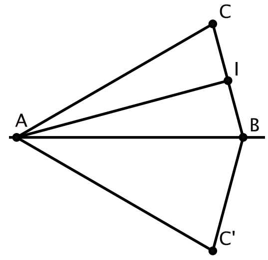
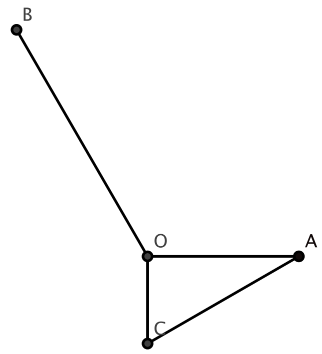
CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 7 PREMIÈRE S 1



EXERCICE 1: On considère le triangle ABC isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{6}$ $[2\pi]$.

1. Construction du triangle ABC :
2. Le triangle étant isocèle en A, alors les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont de même mesure; comme la somme des angles d'un triangle est égal à 180°, et que $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{6}$, soit $\widehat{BAC} = 30°$, alors $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = (180 - 30)/2 = 75°$; ainsi, $(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA}) = \frac{5\pi}{12}$ $[2\pi]$.
3. Comme C' est le symétrique de C par rapport à la droite (AB), AC = AC'. Et le triangle ACC' est isocèle en A. De plus, l'angle $\widehat{BAC} = \widehat{BAC'} = 30°$, donc $\widehat{CAC'} = 60°$. Les deux autres angles sont aussi égaux à 60° ((180 – 60)/2 = 60). Donc ACC' est équilatéral.
4. Donc la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AC'}) = \frac{-\pi}{3}$ $[2\pi]$; et $(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BC'}) = (\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{BC'}) = 2(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA}) = 2\times\frac{5\pi}{12} = \frac{5\pi}{6}$ $[2\pi]$.
5. $(\overrightarrow{CB} ; \overrightarrow{CC'}) = (\overrightarrow{CB} ; \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA} ; \overrightarrow{CC'}) = \frac{-5\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{-5\pi+4\pi}{12} = \frac{-\pi}{12}$ $[2\pi]$.
6. Soit I le milieu du segment [BC]. Le triangle ABC étant isocèle en A, la médiane (AI) est aussi hauteur, donc l'angle $\widehat{AIC} = 90°$. Ainsi $(\overrightarrow{IA} ; \overrightarrow{CC'}) = (\overrightarrow{IA} ; \overrightarrow{IC}) + (\overrightarrow{IC} ; \overrightarrow{CC'}) = \frac{-\pi}{2} + (\overrightarrow{CI} ; \overrightarrow{CC'}) - \pi = \frac{-3\pi}{2} + (\overrightarrow{CB} ; \overrightarrow{CC'}) = \frac{-3\pi}{2} + \frac{-\pi}{12} = \frac{-18\pi-\pi}{12} = \frac{-19\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} = (\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA})$ $[2\pi]$.



EXERCICE 2 : On considère les points O, A, B et C tels que :
$(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}) = \frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$; OB = $\sqrt{3}$ OA, $(\overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OC}) = \frac{5\pi}{6}$ $[2\pi]$ et OC = $\frac{1}{3}$ OB.
On pose $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, considéré comme vecteur unitaire.

1. La figure :
2. Les coordonnées polaires des points : O(0;0) origine du repère; A(1; 0) puisque $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$;
B$(\sqrt{3} ; \frac{2\pi}{3})$ puisque OB = $\sqrt{3}$ OA = $\sqrt{3}$ et $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}) = (\vec{u} ; \overrightarrow{OB}) = \frac{2\pi}{3}$;
C$(\frac{\sqrt{3}}{3} ; \frac{-\pi}{2})$ puisque OC = $\frac{1}{3}$ OB = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $(\vec{u} ; \overrightarrow{OC}) = (\vec{u} ; \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OC})$
$= \frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} = \frac{-\pi}{2}$ $[2\pi]$.
3. Les coordonnées cartésiennes des points sont alors : A(1; 0),
$x_C = \frac{\sqrt{3}}{3}\cos(\frac{-\pi}{2}) = 0$ et $y_C = \frac{\sqrt{3}}{3}\sin(\frac{-\pi}{2}) = \frac{-\sqrt{3}}{3}$.
D'où AC = $\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2} = \sqrt{(0-1)^2+(\frac{-\sqrt{3}}{3}-0)^2} = \sqrt{1+\frac{3}{9}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.
4. On sait alors que le triangle AOC est rectangle en O. donc $\cos(\widehat{OAC}) = \frac{OA}{AC} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et

$\sin(\widehat{OAC}) = \frac{OC}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2}$; donc $\widehat{OAC} = 30°$, soit la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AO} ; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{6}$.

EXERCICE 3 : Résoudre dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ l'équation $\cos^2 x = \sin^2 x$.
$\cos^2 x = \sin^2 x$ équivaut à $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$; on factorise : $(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 0$. Un produit de facteurs est nul si l'un des facteurs est nul :

$\cos x - \sin x = 0$, soit $\cos x = \sin x$ dont les solutions sont S = $\{ \frac{\pi}{4} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z} \}$;

$\cos x + \sin x = 0$ soit $\cos x = -\sin x$ dont les solutions sont S = $\{ \frac{-\pi}{4} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z} \}$.