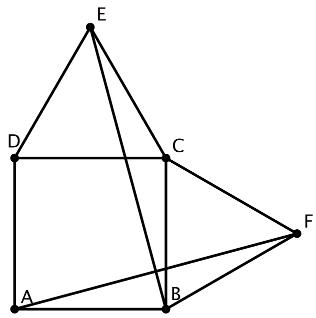
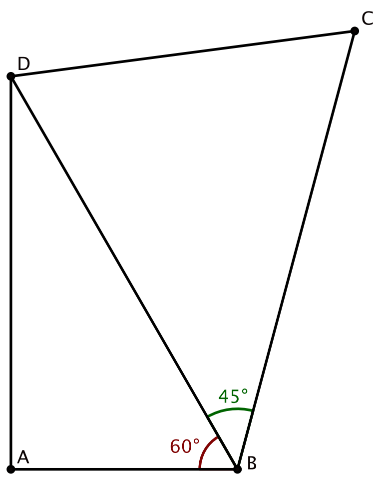
CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 9 PREMIÈRE S 1



EXERCICE 1 : On considère le carré direct ABCD de côté 1 et les triangles équilatéraux directs CBF et DCE.

On considère le repère orthonormé (A; $\vec{AB}$, $\vec{AD}$); alors A(0; 0), B(1; 0), C(1; 1) et D(0; 1).
Soit I le milieu du segment [BC]; comme le triangle BCF est équilatéral, (FI) est une hauteur, donc le triangle BIF est rectangle en I, et BI = 0,5 , BF = 1; à l'aide de Pythagore, IF² = BF² – BI² = 1 – 0,25 = 0,75, soit IF = $\sqrt{0,75} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
d'où, F($1+\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}$); pour les mêmes raisons, E($\frac{1}{2}$; $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$).
Ainsi $\vec{AF}$ ($1+\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}$) et $\vec{BE}$ ($\frac{-1}{2}$; $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$).
D'où le produit scalaire $\vec{AF}\cdot\vec{BE} = (1+\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{-1}{2}) + (\frac{1}{2})(1+\frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$. Donc les vecteurs $\vec{AF}$ et $\vec{BE}$ sont orthogonaux et les droites (AF) et (BE) sont perpendiculaires.
De plus, AF = $\sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1+\sqrt{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$,
et BE = $\sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\sqrt{3}+\frac{3}{4}} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$; donc AF = BE.

EXERCICE 2 : On considère le triangle ABC tel que AB = 18 cm, BC = 15 cm et l'aire du triangle est égale à 108 cm². On utilise la formule de l'aire : aire(ABC) = AB×BC×sin($\widehat{ABC}$),
d'où sin($\widehat{ABC}$) = $\frac{\text{aire}(ABC)}{AB\times BC} = \frac{108}{18\times 15}$ = 0,6. On peut alors trouver la valeur exacte du cosinus de $\widehat{ABC}$,
avec cos²(x) + sin²(x) = 1 : cos²($\widehat{ABC}$) = 1 – sin²($\widehat{ABC}$) = 1 – 0,36 = 0,64,
d'où cos($\widehat{ABC}$) = 0,8 ou cos($\widehat{ABC}$) = – 0,8.
On utilise la formule d'Al-Kashi :
si cos($\widehat{ABC}$) = 0,8, alors AC² = AB² + BC² – 2AB×BC×cos($\widehat{ABC}$) = 18² + 15² – 2×18×15×0,8 = 225, d'où AC = 15; dans ce cas, ABC et isocèle en C.
si cos($\widehat{ABC}$) = – 0,8, AC² = 18² + 15² – 2×18×15×(– 0,8) = 981, et AC ≃ 31,32; dans ce cas, ABC est quelconque.



EXERCICE 3
1. Construction du quadrilatère direct ABCD tel que AB = 3, BC = BD = 6 , $\widehat{ABD}$ = 60° et $\widehat{CBD}$ = 45°.
2. Par la formule d'Al-Kashi, dans le triangle ABD,
AD² = AB² + BD² – 2AB×BD×cos($\widehat{ABD}$) = 3² + 6² – 2×3×6×cos(60°) = 27, soit AD = $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.
Par la formule d'Al-Kashi, dans le triangle BCD,
CD² = BD² + BC² – 2BD×BC×cos($\widehat{CBD}$) = 6² + 6² – 2×6×6×cos(45°) = 72 – 36 $\sqrt{2}$, soit CD = 6 $\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

3. Le triangle BCD est isocèle en B, donc $\widehat{BDC} = \widehat{BCD}$; d'où 2 $\widehat{BDC}$ = 180 – $\widehat{CBD}$ = 135° et $\widehat{BDC}$ = 67,5°.
Par la formule d'Al-Kashi, dans le triangle ABD,
BD² = AB² + AD² – 2AB×AD×cos($\widehat{BAD}$), d'où cos($\widehat{BAD}$) =
$\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2\times AB\times AD} = \frac{3^2+27-6^2}{2\times 3\times 3\sqrt{3}}$ = 0, donc $\widehat{BAD}$ = 90° . Donc le triangle ABD est rectangle en A.
4. Pour déterminer l'aire du quadrilatère ABCD, on additionne l'aire des triangles ABD et BCD.
aire(ABD) = $\frac{AB\times AD}{2} = \frac{3\times 3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$, et aire(BCD) = $\frac{1}{2}$ BD×BC×sin($\widehat{CBD}$) = $\frac{6\times 6\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 9\sqrt{2}$.

Ainsi l'aire(ABCD) = $\frac{9\sqrt{3}}{2} + 9\sqrt{2}$ cm².