CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ N° 1 PREMIÈRE S 1

EXERCICE 1 : On considère les fonctions $f$ et $g$ définie par $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ et $g(x) = -2x^2 + 2x + 1$.

1. Résolution de l'équation $f(x) = 0$ : le discriminant $\Delta = (-5)^2 - 4\times2\times3 = 1 > 0$, il y a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{5+\sqrt{1}}{4} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$ et $x_2 = \dfrac{5-\sqrt{1}}{4} = 1$.

Résolution de l'équation $g(x) = 0$ : le discriminant $\Delta = 2^2 - 4\times(-2)\times1 = 12 > 0$, il y a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-2+\sqrt{12}}{-4} = \dfrac{-2+2\sqrt{3}}{-4} = \dfrac{-2(1+\sqrt{3})}{-2\times2} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ .

2. Le signe des fonctions $f$ et $g$ sur ℝ dans un tableau :

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | 1,5 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | + | 0 | – | 0 | + | |

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ | | $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | – | 0 | + | 0 | – | |

3. La forme canonique de la fonction $f$ est $f(x) = 2x^2 - 5x + 3 = 2(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}) = 2[(x - \frac{5}{4})^2 - \frac{25}{16} + \frac{3}{2}] =$ $2[(x - \frac{5}{4})^2 - \frac{25}{16} + \frac{24}{16}] = 2[(x - \frac{5}{4})^2 - \frac{1}{16}] = 2(x - \frac{5}{4})^2 - \frac{1}{8}$.

4. Les variations de $f$ sur l'intervalle $[\frac{5}{4} ; +\infty[$ :

Soient $a$ et $b$ deux réels de l'intervalle $[\frac{5}{4} ; +\infty[$ tels que $\frac{5}{4} \leqslant a < b$ ; on soustraie $\frac{5}{4}$ : $0 \leqslant a - \frac{5}{4} < b - \frac{5}{4}$ ; on élève au carré des nombres positifs : $0 \leqslant (a - \frac{5}{4})^2 < (b - \frac{5}{4})^2$ ; on multiplie par 2 : $0 \leqslant 2(a - \frac{5}{4})^2 < 2(b - \frac{5}{4})^2$ ; on soustraie $\frac{1}{8}$ : $-\frac{1}{8} \leqslant 2(a - \frac{5}{4})^2 - \frac{1}{8} < 2(b - \frac{5}{4})^2 - \frac{1}{8}$ ; donc $-\frac{1}{8} \leqslant f(a) < f(b)$ ; l'ordre est conservé, donc la fonction $f$ est croissante sur $[\frac{5}{4} ; +\infty[$.

5. Résolution de l'équation $f(x) = g(x)$ : $2x^2 - 5x + 3 = -2x^2 + 2x + 1$ équivaut à $4x^2 - 7x + 2 = 0$. Le discriminant $\Delta = (-7)^2 - 4\times4\times2 = 17 > 0$, il y a deux solutions : $x_1 = \dfrac{7+\sqrt{17}}{8}$ et $x_2 = \dfrac{7-\sqrt{17}}{8}$ .

6. Pour résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$, on utilise le signe de $f(x) - g(x) = 4x^2 - 7x + 2$. Donc la solution est $S = \left[\dfrac{7-\sqrt{17}}{8} ; \dfrac{7+\sqrt{17}}{8}\right]$ .

7. L'ensemble de définition $D_h$ de la fonction $h$ définie par $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ : il faut que $f(x) \neq 0$, soit $x \neq 1$ et $x \neq 1{,}5$.

Donc $D_h = ℝ \setminus \{1; 1{,}5\}$.

EXERCICE 2 : On considère les fonctions $f$ et $g$ définies sur ℝ. La parité de la fonction $gof$ dans les cas suivants

a) La fonction $f$ est paire et $g$ est quelconque : pour tout réel $x$, $gof(-x) = g(f(-x) = g(f(x) = gof(x)$; donc la fonction $gof$ est paire.

b) La fonction $f$ est impaire et $g$ est paire : pour tout réel $x$, $gof(-x) = g(f(-x) = g(-f(x) = g(f(x) = gof(x)$; donc la fonction $gof$ est paire.

c) La fonction $f$ est définie par $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$ et $g$ est définie par $g(x) = x^2 + x$ :

pour tout réel $x$, $gof(x) = (3x - \frac{1}{2})^2 + 3x - \frac{1}{2} = 9x^2 - 3x + \frac{1}{4} + 3x - \frac{1}{2} = 9x^2 - \frac{1}{4}$ qui est une fonction paire puisque $9(-x)^2 - \frac{1}{4} = 9x^2 - \frac{1}{4}$. Donc la fonction $gof$ est paire.

EXERCICE 3 : Parmi les propositions suivantes, indiquer celles qui sont exactes. Soit C la courbe d'équation : $y = x^2$ dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1. La courbe $C_1$ d'équation : $y = (x - 1)^2$ est l'image de la courbe C par la translation de vecteur : a. $\vec{i}$
2. La courbe $C_2$ d'équation : $y = x^2 - 1$ est l'image de la courbe C par la translation de vecteur : c. $-\vec{j}$
3. La courbe C admet : a. l'axe des ordonnées comme axe de symétrie ;

EXERCICE 4 : On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -6x^2 + 19x - 10$ et C la courbe représentative de $f$ dans un repère du plan.

1. Résolution de l'équation $f(x) = 0$ : le discriminant $\Delta = 19^2 - 4\times(-6)\times(-10) = 121 > 0$, il y a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-19+\sqrt{121}}{-12} = \dfrac{-19+11}{-12} = \dfrac{-8}{-12} = \dfrac{2}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-19-\sqrt{121}}{-12} = \dfrac{-19-11}{-12} = \dfrac{-30}{-12} = \dfrac{5}{2}$ .

2. La forme factorisée de $f$ est $f(x) = -6(x - \dfrac{2}{3})(x - \dfrac{5}{2})$ .

3. Pour déterminer les points d'intersection de la courbe C et de la droite d'équation $y = -2x + 5$, on résout l'équation $f(x) = -2x + 5$, soit $-6x^2 + 19x - 10 = -2x + 5$ , soit $-6x^2 + 21x - 15 = 0$. On peut simplifier par 3 : $-2x^2 + 7x - 5 = 0$. Le discriminant $\Delta = 7^2 - 4\times(-2)\times(-5) = 9 > 0$, il y a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-7+\sqrt{9}}{-4} = \dfrac{-7+3}{-4} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-7-\sqrt{9}}{-4} = \dfrac{-7-3}{-4} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}$ .

Les abscisses des points d'intersection de la courbe C et de la droite d'équation $y = -2x + 5$, sont 1 et $\dfrac{5}{2}$ .

Les ordonnées sont $y_1 = -2\times 1 + 5 = 3$ et $y_2 = -2\times \dfrac{5}{2} + 5 = 0$. Les coordonnées des points d'intersection de la courbe C et de la droite d'équation $y = -2x + 5$, sont (1; 3) et ( $\dfrac{5}{2}$ ; 0).