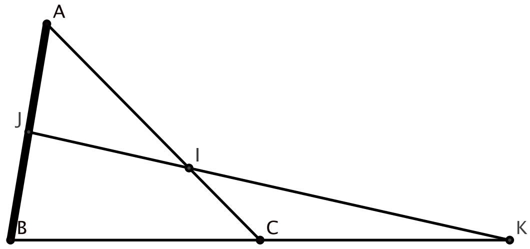
CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ N° 2 PREMIÈRE S 1

EXERCICE 1 : On considère le triangle ABC et les points I, J et K définis par $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$, J est le milieu de [AB] et $\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BC}$.

1. La figure ci-contre :



2. Pour montrer que les points I, J et K sont alignés, on cherche un réel k tel que $\overrightarrow{JK} = k\,\overrightarrow{JI}$:

on sait que $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$;

et $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$; d'où $\overrightarrow{JK} = 3\overrightarrow{JI}$; les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JI}$ sont colinéaires, donc les les points I, J et K sont alignés.

EXERCICE 2 : On considère le tétraèdre ABCD et les points E, F, G et H définis par :

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, F est le milieu de [ED], $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BH} = 3\overrightarrow{BC}$.

1. Pour montrer que le point E est le milieu du segment [AH], on peut montrer que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EH}$;

or $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, et $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} = -\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} =$

$-\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EH}$ et E est le milieu du segment [AH].

2. Pour savoir si les points F, G et H sont alignés, on cherche si les vecteurs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont colinéaires. Pour cela, on peut déterminer les coordonnées des points E, F, G et H dans le repère (A; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$).

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$, d'où E($-1$; $\frac{3}{2}$; 0).

F milieu de [ED], donc F($-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$). $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, donc G(0; 0; $\frac{2}{3}$) et $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$ $= -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$, donc H($-2$; 3; 0).

Ainsi, $\overrightarrow{FG}$ ($\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{4}$; $\frac{1}{6}$) et, $\overrightarrow{GH}$ (-2; 3; $-\frac{2}{3}$); on remarque que $\overrightarrow{GH} = -4\overrightarrow{FG}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont colinéaires, donc les points F, G et H sont alignés.

3. Pour savoir si les points B, C, F et G sont coplanaires, on cherche deux réels a et b tels que

$\overrightarrow{FG} = a\,\overrightarrow{BC} + b\,\overrightarrow{BG}$; $\overrightarrow{BC}$ (-1; 1; 0) et $\overrightarrow{BG}$ (-1; 0; $\frac{2}{3}$). On trouve alors $\frac{1}{2} = 1 - a - b$; $-\frac{3}{4} = a$ et $\frac{1}{6} = \frac{2}{3}b$ ce qui est impossible; donc les points B, C, F et G ne sont pas coplanaires,

EXERCICE 3 : On considère l'espace muni du repère (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) et les quatre points A(1; 2; -1), B(3; 0; 2), C(4; 1; 5) et D(-2; 7; -4).

1. On a $\overrightarrow{AB}$ (2; -2; 3) et $\overrightarrow{CD}$ (-6; 6; -9); donc $\overrightarrow{CD} = -3\overrightarrow{AB}$; les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. On en déduit que les droites (AB) et (CD) sont parallèles, donc les quatre points A, B, C et D sont coplanaires.

2. F est le symétrique de C par rapport à B, donc B est le milieu de [CF], et $x_B = \frac{x_C + x_F}{2}$, d'où $x_F = 2x_B - x_C$; ainsi $x_F = 2$; de même $y_F = -1$; et $z_F = -1$; E est le milieu de [BF], donc $x_E = \frac{x_B + x_F}{2} = \frac{5}{2}$, $y_E = \frac{-1}{2}$, $z_E = \frac{1}{2}$.

Pour montrer que les points A, D et E sont alignés, on cherche un réel k tel que $\overrightarrow{AD} = k\,\overrightarrow{AE}$:

$\overrightarrow{AD}$ (-3; 5; -3) et $\overrightarrow{AE}$ ($\frac{3}{2}$; $\frac{-5}{2}$; $\frac{3}{2}$). On a $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AE}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires, et les points A, D et E sont alignés.

EXERCICE 4 : On considère, dans un repère (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$), la parabole P de sommet S(1 ; – 2) et passant par le point A(0; – 1).

1. Le sommet de la parabole représentative d'un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ a pour coordonnées ($\frac{-b}{2a}$; $\frac{-\Delta}{4a}$); ici les coordonnées du sommet de la parabole représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 1$ sont $\frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$ et $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-((-2)^2 - 4\times1\times(-1))}{4\times1} = -2$. De plus le point A est bien sur la courbe représentative de f puisque $f(0) = -1$. Ainsi P est la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 1$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 - 2x + 2$ et P' sa représentation graphique.

a) Pour déterminer les abscisses des points d'intersection de P et de P' , il suffit de résoudre l'équation $f(x) = g(x)$, soit $x^2 - 2x - 1 = -x^2 - 2x + 2$ équivaut à $2x^2 - 3 = 0$.

Cette équation a deux solutions $x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ et $x_2 = \frac{-\sqrt{6}}{2}$. Les ordonnées des points d'intersection sont alors $y_1 = f(\frac{\sqrt{6}}{2}) = \frac{1}{2} - \sqrt{6}$ et $y_2 = f(\frac{-\sqrt{6}}{2}) = \frac{1}{2} + \sqrt{6}$.

b) L'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$ équivaut à $x^2 - 2x - 1 \leqslant -x^2 - 2x + 2$ équivaut à $2x^2 - 3 \leqslant 0$. A l'aide du signe du polynôme du second degré $2x^2 - 3$, la solution de l'inéquation est S = [$\frac{-\sqrt{6}}{2}$; $\frac{\sqrt{6}}{2}$].

3. L'axe de symétrie d'une parabole représentative d'un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ a pour équation $x = \frac{-b}{2a}$. Donc l'axe de symétrie de la parabole P est la droite d'équation $x = 1$ et l'axe de symétrie de la parabole P' est la droite d'équation $x = -1$.

4. Le sommet de la parabole P' est le point S'(– 1; 3).

EXERCICE 5 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 6x^2 - 9x - 14$ et C sa représentation graphique.

1. Pour montrer que 2 est racine de f, on calcule $f(2) = 2^3 + 6\times2^2 - 9\times2 - 14 = 8 + 24 - 18 - 14 = 32 - 32 = 0$. Donc 2 est bien racine de f .

2. On en déduit une factorisation de f : $f(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$.

3. On développe la factorisation précédente : $f(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c$. Par identification des polynômes, on trouve $a = 1$; $b - 2a = 6$; $c - 2b = -9$ et $-2c = -14$;
on trouve $a = 1$; $b = 8$; $c = 7$. Donc $f(x) = (x - 2)(x^2 + 8x + 7)$. Un produit de facteurs est nul si l'un des facteurs est nul : $x - 2 = 0$ donne $x = 2$; $x^2 + 8x + 7 = 0$: on calcule le discriminant $\Delta = 8^2 - 4\times1\times7 = 36 = 6^2 > 0$; il y a donc deux solutions : $x_1 = \frac{-8-\sqrt{36}}{2} = \frac{-8-6}{2} = -7$ et $x_2 = \frac{-8+\sqrt{36}}{2} = \frac{-8+6}{2} = -1$.
L'ensemble solution de l'équation $f(x) = 0$ est S = {– 1; 2; – 7}.

4. a) Pour montrer que la fonction f peut s'écrire $f(x) = (x + 2)^3 - 21(x + 2) + 20$, on développe cette dernière expression : $(x + 2)^3 - 21(x + 2) + 20 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 21x - 42 + 20 = x^3 + 6x^2 - 9x - 14 = f(x)$.

b) Pour montrer que le point A(– 2; 20) est centre de symétrie de C, il faut montrer que pour tout réel x , $f(-2 + x) + f(-2 - x) = 2\times20 = 40$:
En utilisant l'expression de la question 4. a), on trouve
$f(-2 + x) + f(-2 - x) = (-2 + x + 2)^3 - 21(-2 + x + 2) + 20 + (-2 - x + 2)^3 - 21(-2 - x + 2) + 20 =$
$x^3 - 21x + 20 + (-x)^3 + 21x + 20 = 40$. Donc le point A(– 2; 20) est bien centre de symétrie de C.