EXERCICE 1 (8 points)

On considère le triangle ABC équilatéral direct de côté 6 cm, les points I et J sont les milieux respectifs des côtés [AB] et [BC] et G est le centre de gravité de ABC. On se place dans le repère (A; $\vec{AB}$, $\vec{AC}$).

1. a) Calculer le produit scalaire $\vec{AJ} \cdot \vec{CI}$.
- b) En déduire la mesure exacte de l'angle $\widehat{IGJ}$.
- c) Déterminer une équation de la droite (IJ) et une équation de la droite (BG).
- d) En déduire les coordonnées du point D intersection des droites (IJ) et (BG).

2. On considère le réel k et les points M et N définis par $\vec{AM} = k \vec{AB}$ et $\vec{CN} = k \vec{CB}$.

- a) Faire une figure avec $k = \frac{1}{3}$.

Dans la suite de l'exercice, le réel k est quelconque.

- b) Montrer que les coordonnées de N sont $N(k; 1 - k)$.
- c) Calculer le produit scalaire $\vec{AN} \cdot \vec{CM}$ en fonction de k .
3. En déduire les valeurs de k pour lesquelles les droites (AN) et (CM) sont perpendiculaires.
4. Déterminer la valeur de k pour laquelle les droites (AN) et (CM) sont parallèles.

EXERCICE 2 (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

On considère les équations (E₁) : $x^2 - 4x + y^2 - 6y + 5 = 0$ et (E₂) : $x^2 - 4x + y^2 - 6y + 13 = 0$.

1. Préciser quels sont les ensembles de points (E₁) et (E₂) et donner leurs éléments caractéristiques.
2. Donner les coordonnées des points d'intersection A et B de (E₁) avec l'axe des ordonnées.
3. Donner les équations des tangentes à (E₁) aux points A et B.

BONUS : Les deux tangentes se coupent en C. Quelle est la nature du triangle ABC ?

EXERCICE 3 (7 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_{n+1} = u_n + 3$ et $u_0 = 8$; $v_{n+1} = 2v_n$ et $v_0 = -4$.

1. Calculer les quatre premiers termes de chaque suite.
2. Préciser la nature de chaque suite.
3. Écrire alors u_n et v_n en fonction de n .
4. Calculer u_{100} et v_{10} .
5. Étudier les variations des deux suites.
6. On considère la suite (w_n) définie par $w_n = 2u_n + \frac{1}{4}v_n - 6n$.
- a) Écrire w_{n+1} en fonction de u_n , v_n et n , puis en fonction de n .
- b) Calculer w_0 et w_4 .