CORRECTION DU BAC BLANC DE MATHEMATIQUES 2010 - CLASSES DE 1RE S

EXERCICE 1

1) On lit : $f(0)=1$, $f'(0)=2$, $f(1)=3$, $f'(1)=1$.

2) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ donc $f(0)=1 \Leftrightarrow d=1$ et $f(1)=3 \Leftrightarrow a+b+c+d=3$

f est une fonction polynôme, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Alors : $f'(0)=2 \Leftrightarrow c=2$ et $f'(1)=1 \Leftrightarrow 3a+2b+c=1$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} d=1 \\ a+b+c+d=3 \\ c=2 \\ 3a+2b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ d=1 \\ a+b+2+1=3 \\ 3a+2b+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ d=1 \\ a+b=0 \\ 3a+2b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ d=1 \\ b=-a \\ 3a-2a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ d=1 \\ b=-a=1 \\ a=-1 \end{cases}$$

Alors $f(x)=-x^3+x^2+2x+1$.

3) La droite (AB) a pour coefficient directeur 2.

$$f'(x)=2 \Leftrightarrow -3x^2+2x+2=2 \Leftrightarrow -3x^2+2x=0 \Leftrightarrow x(-3x+2)=0 \Leftrightarrow x=0 \ \text{ou}\ -3x+2=0 \ \text{soit}\ x=\frac{2}{3}$$

Les tangentes au point d'abscisse 0 (on le savait : $f'(0)=2$) et $\frac{2}{3}$ sont parallèles à la droite (AB).

EXERCICE 2

1) $ax+b+\frac{c}{x-2}=\frac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2}=\frac{ax^2+(b-2a)x+c-2b}{x-2}$. Par identification des coefficients :

$$\begin{cases} a=4 \\ b-2a=-3 \\ c-2b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-3+2a=5 \\ c=-1+2b=9 \end{cases} \text{ d'où : } f(x)=4x+5+\frac{9}{x-2}.$$

2) Pour tout réel x non nul,

$$f(2+x)+f(2-x)=4(2+x)+5+\frac{9}{2+x-2}+4(2-x)+5+\frac{9}{2-x-2}=8+\cancel{4x}+5+\frac{9}{x}+8-\cancel{4x}+5+\frac{9}{-x}$$

$=26+\cancel{\frac{9}{x}}-\cancel{\frac{9}{x}}=26=2\times 13=2y_I$. Par conséquent, le point $I(2\ ;\ 13)$ est centre de symétrie pour la courbe (C).

3) Etude en $+\infty$ *et* $-\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}4x=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}4x=-\infty$.

Etude en 2 : $\lim\limits_{x\to 2}(4x^2-3x-1)=9$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}}(x-2)=0^+$ *donc* $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}} f(x)=+\infty$

et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x<2}}(x-2)=0^-$ *donc* $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x<2}} f(x)=-\infty$

La droite d'équation $x=2$ est donc asymptote verticale à la courbe (C).

4) $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{4x^2-3x-1}{x-2}=0 \Leftrightarrow 4x^2-3x-1=0$ *et* $x\neq 2$.

$\Delta=(-3)^2-4\times 4\times(-1)=9+16=25>0$, le trinôme $4x^2-3x-1$ a 2 racines $x_1=\frac{3-5}{8}=-\frac{1}{4}$ et

$x_2=\frac{3+5}{8}=1$. Les points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses sont $\left(-\frac{1}{4};0\right)$ et $(1;0)$.

5) **a.** On a : $f(x)-(4x+5)=4x+5+\frac{9}{x-2}-(4x+5)=\frac{9}{x-2}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(4x+5)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{9}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{9}{x}=0$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(4x+5)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{9}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{9}{x}=0$.

Donc la droite Δ d'équation $y = 4x + 5$ est asymptote oblique à la courbe (C).

b. La position relative de (C) et de la droite Δ est donnée par le signe de $f(x) - (4x+5) = \dfrac{9}{x-2}$.

Ce quotient est strictement positif pour $x > 2$ et strictement négatif pour $x < 2$.
Donc (C) est en dessous de Δ pour $x < 2$ et au dessus pour $x > 2$.

6) f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et dérivable sur son domaine de définition car c'est une fonction rationnelle.

Pour $x \neq 2$, $f'(x) = \dfrac{(8x-3)(x-2) - (4x^2 - 3x - 1)}{(x-2)^2} = \dfrac{8x^2 - 16x - 3x + 6 - 4x^2 + 3x + 1}{(x-2)^2} = \dfrac{4x^2 - 16x + 7}{(x-2)^2}$.

7) Puisque pour tout $x \neq 2$, $(x-2)^2 > 0$, le signe de f 'est le signe de $4x^2 - 16x + 7$.

$\Delta = (-16)^2 - 4 \times 4 \times 7 = 256 - 112 = 144 > 0$, le trinôme a 2 racines : $x_1 = \dfrac{16-12}{8} = \dfrac{1}{2}$ et $x_1 = \dfrac{16+12}{8} = \dfrac{7}{2}$ et il est du signe de a donc positif à l'extérieur de ses racines.

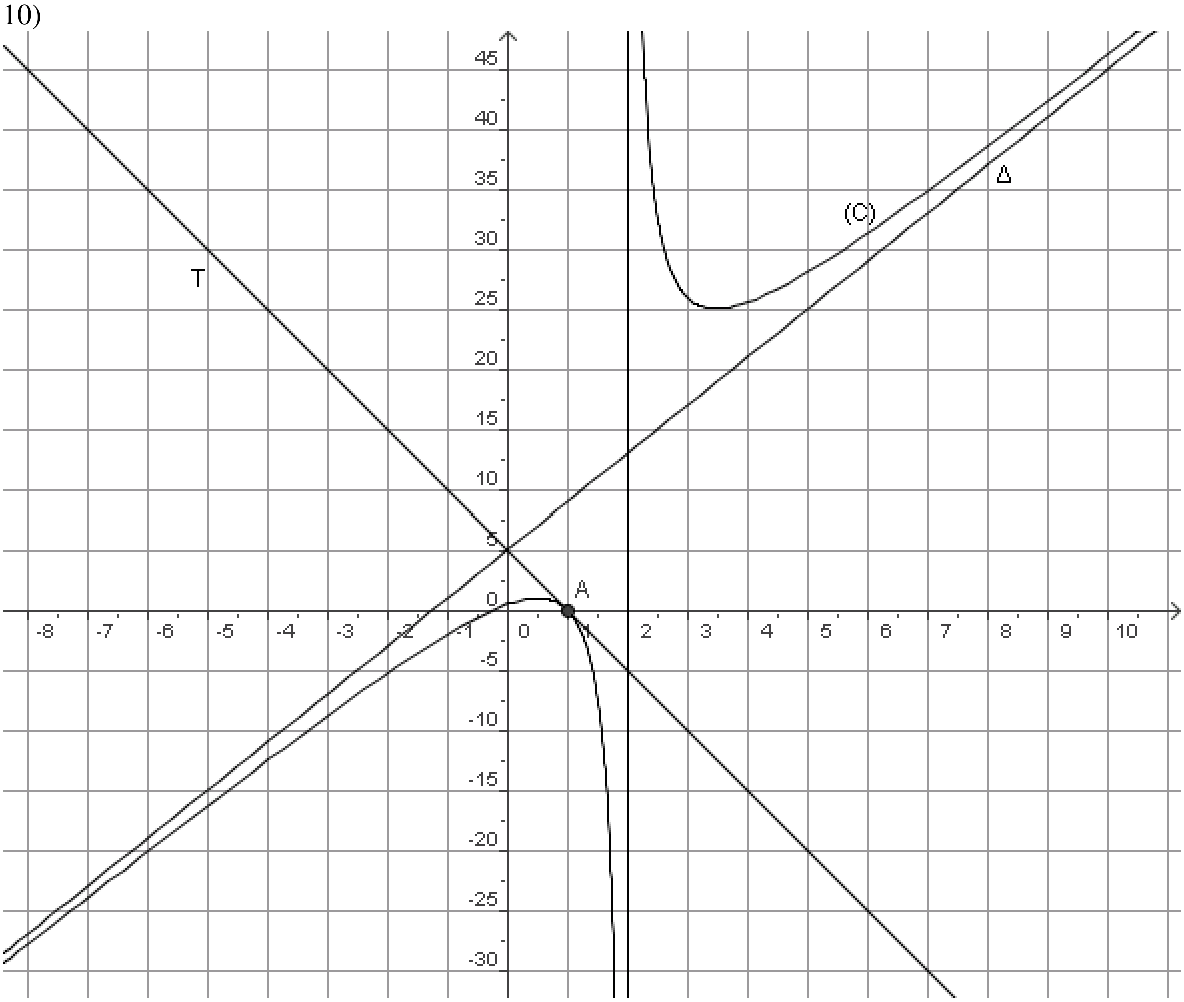
x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	25	$\nearrow$	$+\infty$

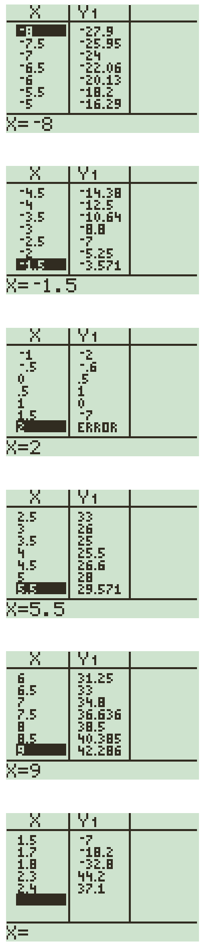
8) f a un maximum local 1 atteint en $\dfrac{1}{2}$ et un minimum local 25 atteint en $\dfrac{7}{2}$.

9) L'équation de la tangente T à la courbe C_f de f au point A d'abscisse 1 est $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

On a : $f(1) = 0$ et $f'(1) = -5$. La tangente T a donc pour équation : $y = -5(x-1) = -5x + 5$.

10)





EXERCICE 3

1) Le théorème de Pythagore donne : $h^2+x^2=30^2 \Leftrightarrow h^2=900-x^2$.

   D'où : $xh^2=x\left(900-x^2\right)=-x^3+900x$.

2) *f* est une fonction polynôme, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=-3x^2+900$.

   Déterminons le signe de $-3x^2+900$:

   - soit : $-3x^2+900=-3\left(x^2-300\right)=-3\left(x-\sqrt{300}\right)\left(x+\sqrt{300}\right)=-3\left(x-10\sqrt{3}\right)\left(x+10\sqrt{3}\right)$

     donc le trinôme a pour racines $10\sqrt{3}$ et $-10\sqrt{3}$

   - soit : $\Delta=b^2-4ac=0^2-4\times(-3)\times 900=10800>0$. Le trinôme a deux racines :

     $$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-\sqrt{10800}}{-6}=\frac{60\sqrt{3}}{6}=10\sqrt{3} \quad et \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{\sqrt{10800}}{-6}=-\frac{60\sqrt{3}}{6}=-10\sqrt{3}$$

     et il est du signe de *a* donc négatif à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		$-10\sqrt{3}$		$10\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$-6000\sqrt{3}$	$\nearrow$	$6000\sqrt{3}$	$\searrow$	

$$f\left(10\sqrt{3}\right)=-\left(10\sqrt{3}\right)^3+900\times 10\sqrt{3}=-1000\times 3\sqrt{3}+9000\sqrt{3}=-3000\sqrt{3}+9000\sqrt{3}=6000\sqrt{3}$$

et $\quad f\left(-10\sqrt{3}\right)=-\left(-10\sqrt{3}\right)^3+900\times\left(-10\sqrt{3}\right)=1000\times 3\sqrt{3}-9000\sqrt{3}=3000\sqrt{3}-9000\sqrt{3}=-6000\sqrt{3}$

3) La résistance est maximale à la flexion lorsque le produit xh^2 est maximal.

   D'après la question 1, $xh^2=-x^3+900x=f(x)$.

   Sur l'intervalle $[0;30]$, le maximum de *f* est $6000\sqrt{3}$ atteint pour $x=10\sqrt{3}\approx 17{,}3$.

   Les dimensions qui offrent à la poutre une résistance maximale sont :

   $x=10\sqrt{3}\approx 17{,}3$ et $h=\sqrt{900-x^2}=\sqrt{900-\left(10\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{900-300}=\sqrt{600}=10\sqrt{6}\approx 24{,}5$

EXERCICE 4

1) Figure Annexe 2.

2) Dans le repère $\left(A,\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$, $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ donc $N\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

   $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$ donc $M\left(0;\frac{2}{3};1\right)$.

   $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ donc $P\left(2;\frac{1}{3};0\right)$

   Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont colinéaires :

   $$\overrightarrow{MN}=\begin{pmatrix}1-0\\ \frac{1}{2}-\frac{2}{3}\\ \frac{1}{2}-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{MP}=\begin{pmatrix}2-0\\ \frac{1}{3}-\frac{2}{3}\\ 0-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -\frac{1}{3}\\ -1\end{pmatrix}.$$ On voit que $\overrightarrow{MP}=2\overrightarrow{MN}$.

(Sinon, on cherche s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{MP}=k\overrightarrow{MN}$, on obtient le système :

$$\begin{cases} 2=k\times 1 \\ -\dfrac{1}{3}=k\times\left(-\dfrac{1}{6}\right) \\ -1=k\times\left(-\dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2 \\ k=-\dfrac{1}{3}\div\left(-\dfrac{1}{6}\right)=-\dfrac{1}{3}\times(-6)=2 \\ k=-1\div\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1\times(-2)=2 \end{cases}.$$

Par conséquent, $\overrightarrow{MP}=2\overrightarrow{MN}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont donc colinéaires et les points M, N et P sont alignés.

EXERCICE 5

1) On a $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}3-4\\-2-(-3)\\1-1\end{pmatrix}$ *soit* $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4-4\\-2-(-3)\\0-1\end{pmatrix}$ *soit* $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}4-2\\-3-1\\1-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}$ donc $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

Alors $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}-1+0+1\\1+1-2\\0-1+1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\vec{0}$.

2) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{BD}=2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}$, les vecteurs $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ sont coplanaires, donc les points A, B, C, D sont coplanaires.

3) E est le milieu de $[BD]$ alors $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BE}$ donc le quadrilatère ABCE est un parallélogramme.

De plus $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ *donc* $BA=\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ *donc* $BC=\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

Le parallélogramme ABCE a deux côtés consécutifs de même longueur : c'est un losange.

EXERCICE 6

1) $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2}=\sqrt{12+4}=\sqrt{16}=4$

Alors $\cos\theta=\dfrac{x}{r}=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *et* $\sin\theta=\dfrac{y}{r}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$ donc $\theta=\dfrac{\pi}{6}(2\pi)$.

Les coordonnées polaires de M sont $\left(2;\dfrac{\pi}{6}\right)$

2) $r=ON=\dfrac{1}{2}OM=\dfrac{1}{2}\times 2=1$ et $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{ON}\right)=\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}\right)+\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}\right)=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{11\pi}{12}$

Les coordonnées polaires de N sont $\left(1;\dfrac{11\pi}{12}\right)$.

3) a) $\dfrac{11\pi}{12}=\pi-\dfrac{\pi}{12}$ donc :

$\cos\frac{11\pi}{12}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)=-\cos\frac{\pi}{12}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b) On sait que les coordonnées polaires de N sont $\left(1;\frac{11\pi}{12}\right)$ donc ses coordonnées cartésiennes sont :

$x_N=r\cos\theta=1\times\cos\frac{11\pi}{12}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $y_N=r\sin\theta=1\times\sin\frac{11\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

EXERCICE 7

1) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad ou \quad 2x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad ou \quad 2x=-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{-\pi}{6}+2k\pi \quad ou \quad 2x=-\frac{3\pi}{6}+2k\pi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$\Leftrightarrow x=\frac{-\pi}{12}+k\pi \quad ou \quad x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$

Dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$, $x=\frac{-\pi}{12}+k\pi$ donne : pour $k=0$, $x=-\frac{\pi}{12}$

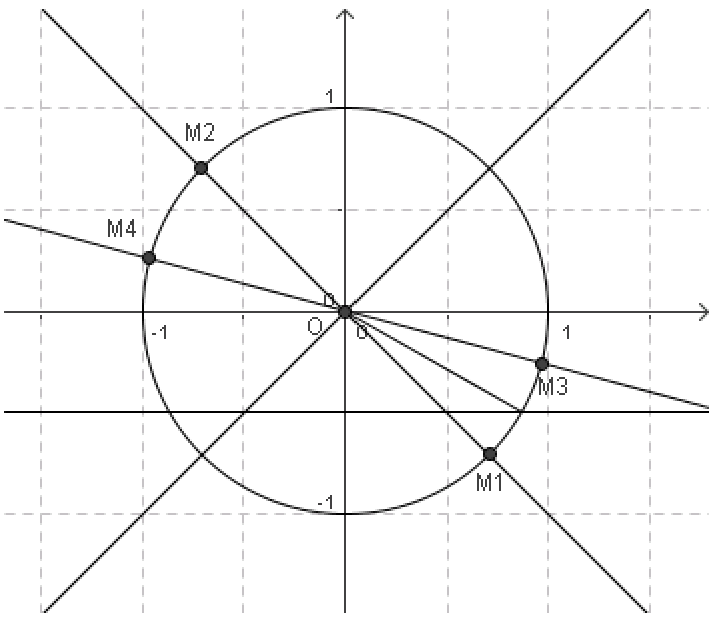
et pour $k=1$, $x=\frac{-\pi}{12}+\pi=\frac{11\pi}{12}$

$x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ donne : pour $k=0$, $x=-\frac{\pi}{4}$

et pour $k=1$, $x=\frac{-\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}$

donc dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$: $S=\left\{-\frac{\pi}{4};-\frac{\pi}{12};\frac{3\pi}{4};\frac{11\pi}{12}\right\}$.

2)



$\left(\vec{i};\overrightarrow{OM_1}\right)=-\frac{\pi}{4}$; $\left(\vec{i};\overrightarrow{OM_2}\right)=\frac{3\pi}{4}$; $\left(\vec{i};\overrightarrow{OM_3}\right)=-\frac{\pi}{12}$; $\left(\vec{i};\overrightarrow{OM_4}\right)=\frac{11\pi}{12}$