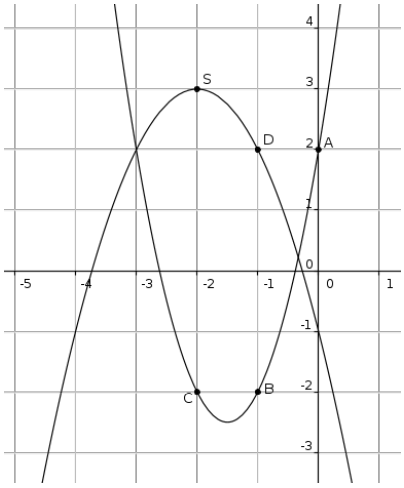
CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 1 PREMIÈRE S



EXERCICE 1 : Le graphique ci-contre donne deux paraboles P_1 et P_2 et les points A, B, C, D et S dont les coordonnées sont entières.
A, B et C sont sur P_1 , D est sur P_2 et S est le sommet de P_2.
1. On a A(0 ; 2), B(– 1 ; – 2), C(– 2 ; – 2), D(– 1 ; 2) et S(– 2 ; 3).
On sait que $f(x) = ax^2 + bx + c$; ainsi $f(0) = 2$, donc $c = 2$;
$f(-1) = -2$, donc $a - b + 2 = -2$, soit $a - b = -4$;
$f(-2) = -2$, donc $4a - 2b + 2 = -2$, soit $4a - 2b = -4$;
la première équation nous donne $a = b - 4$; on remplace dans la deuxième :
$4(b - 4) - 2b = -4$, soit $4b - 16 - 2b = -4$, soit
$2b = 12$, soit $b = 6$, et $a = b - 4 = 2$; donc $f(x) = 2x^2 + 6x + 2$.
Pour la fonction g, on utilise la forme canonique :
$g(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $(\alpha ; \beta)$ sont les coordonnées du sommet S de la parabole, donc $g(x) = a(x + 2)^2 + 3$; pour déterminer a, on utilise le point D :
$g(-1) = 2$, donc $g(-1) = a(-1 + 2)^2 + 3 = 2$, soit $a + 3 = 2$, soit $a = -1$; donc
$g(x) = -1(x + 2)^2 + 3 = -x^2 - 4x - 1$.

2. L'abscisse du sommet de P_1, est $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2\times 2} = \frac{-3}{2}$ et

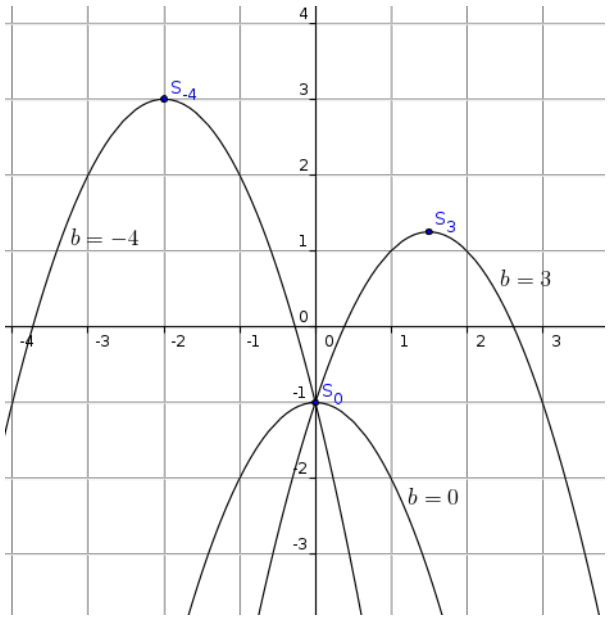
$\beta = f(\frac{-3}{2}) = 2(\frac{-3}{2})^2 + 6(\frac{-3}{2}) + 2 = \frac{9}{2} - 9 + 2 = \frac{-5}{2}$. $S_1(\frac{-3}{2} ; \frac{-5}{2})$.

3. $f(x) = 0$ équivaut à $2x^2 + 6x + 2 = 0$: le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4\times 2\times 2 = 20 > 0$, donc l'équation a deux solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-\sqrt{20}}{2\times 2} = \frac{-6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

$g(x) = 0$ équivaut à $-x^2 - 4x - 1 = 0$: le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\times(-1)\times(-1) = 12 > 0$, donc l'équation a deux solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-\sqrt{12}}{2\times(-1)} = \frac{4-2\sqrt{3}}{-2} = -2+\sqrt{5}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -2-\sqrt{5}$.

4. Pour déterminer les coordonnées des points d'intersection des deux paraboles, on résout l'équation $f(x) = g(x)$, soit $2x^2 + 6x + 2 = -x^2 - 4x - 1$, soit $3x^2 + 10x + 3 = 0$; le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4\times 3\times 3 = 64 = 8^2 > 0$, donc l'équation a deux solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10-8}{2\times 3} = -3$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10+8}{2\times 3} = \frac{-1}{3}$.
Les ordonnées sont : $y_1 = f(x_1) = f(-3) = 2(-3)^2 + 6(-3) + 2 = 2$, et
$y_2 = f(x_2) = f(\frac{-1}{3}) = 2(\frac{-1}{3})^2 + 6(\frac{-1}{3}) + 2 = \frac{2}{9}$. Coordonnées des points d'intersection des deux paraboles :
$(-3 ; 2)$ et $(\frac{-1}{3} ; \frac{2}{9})$.

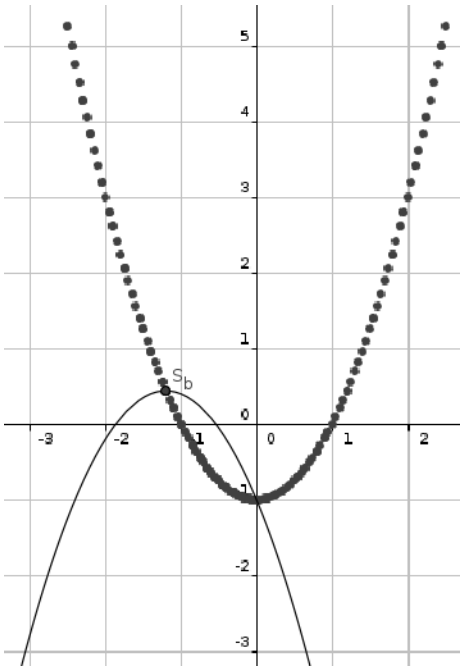
5. L'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$ a pour solution $S = [-3 ; \frac{-1}{3}]$.



EXERCICE 2 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + bx - 1$ où b est un réel quelconque.
1. Tracé des paraboles représentant la fonction f dans chacun des cas suivants : $b = 0$; $b = -4$; $b = 3$:
2. Lorsque $b = 0$: $f(x) = -x^2 - 1$; coordonnées du sommet S_0 : $\alpha = \frac{-b}{2a} = 0$ et $\beta = f(0) = -1$; $S_0(0 ; -1)$.
Lorsque $b = -4$: $f(x) = -x^2 - 4x - 1$; coordonnées du sommet S_{-4} : $\alpha = \frac{-b}{2a} = -2$ et $\beta = f(-2) = 3$;
$S_{-4}(-2 ; 3)$.
Lorsque $b = 3$: $f(x) = -x^2 + 3x - 1$; coordonnées du sommet S_3 : $\alpha = \frac{-b}{2a} = 1{,}5$ et $\beta = f(1{,}5) = 1{,}25$;
$S_3(1{,}5 ; 1{,}25)$.

3. b est un réel quelconque.

Les coordonnées du sommet S_b de la parabole représentant f : $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-b}{-2} = \dfrac{b}{2}$ et

$\beta = f(\dfrac{b}{2}) = -(\dfrac{b}{2})^2 + b\dfrac{b}{2} - 1 = -\dfrac{b^2}{4} + \dfrac{b^2}{2} - 1 = \dfrac{b^2}{4} - 1$. Donc $S_b(\dfrac{b}{2} \; ; \; \dfrac{b^2}{4} - 1)$.

4. On remarque que $\beta = \alpha^2 - 1$, donc le sommet S_b est sur la parabole représentative de la fonction h définie par $h(x) = x^2 - 1$.
L'équation de la courbe décrite par le sommet S_b lorsque b décrit $\mathbb{R}$ est $y = x^2 - 1$.