CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 2 PREMIÈRE S

EXERCICE 1 : On considère le polynôme P défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c des réels et a est non nul.
On suppose que le discriminant Δ est strictement positif et on note x_1 et x_2 les solutions de l'équation $P(x) = 0$.

1. On sait que $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, d'où $x_1 + x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2b}{2a} = \dfrac{-b}{a}$.

Et $x_1 \times x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \times \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{(-b+\sqrt{\Delta})(-b-\sqrt{\Delta})}{4a^2} = \dfrac{(-b)^2-\Delta}{4a^2} = \dfrac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \dfrac{4ac}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$.

2. Pour tout réel x, $a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1\times x_2) = a(x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1\times x_2) = a(x^2 - x(\dfrac{-b}{a}) + \dfrac{c}{a})$
$= ax^2 + bx + c = P(x)$.

3. Applications : On sait que $x_1 + x_2 = 2$ et $x_1 \times x_2 = -1$, donc on cherche un polynôme du second degré avec $\dfrac{-b}{a} = 2$ et $\dfrac{c}{a} = -1$; on peut prendre $a = 1$, d'où $b = -2$ et $c = -1$. Le polynôme est $x^2 - 2x - 1$.

On résout l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$; $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\times1\times(-1) = 8 > 0$, donc l'équation a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2-\sqrt{8}}{2} = \dfrac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2+\sqrt{8}}{2} = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$.

Les deux nombres réels x_1 et x_2 dont la somme est égale à 2 et le produit est égal à -1 sont $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$.

EXERCICE 2 : Un fil de 1 mètre de long est coupé en deux morceaux, l'un constituant le périmètre d'un carré et l'autre constituant le périmètre d'un rectangle dont la longueur est égale à deux fois la largeur.
On veut étudier la somme des aires du carré et du rectangle.
On pose x la longueur du morceau de fil formant le carré.

1. Le périmètre du carré est égal à x donc son côté vaut $\dfrac{x}{4}$ et sont aire est égale à $\dfrac{x^2}{16}$.

Le périmètre du rectangle est égal à $1 - x$ avec $L = 2l$, soit $2L + 2l = 4l + 2l = 6l = 1 - x$,
soit $l = \dfrac{1-x}{6}$ et $L = \dfrac{1-x}{3}$ et sont aire est égale à $Ll = \left(\dfrac{1-x}{3}\right)\left(\dfrac{1-x}{6}\right) = \dfrac{(1-x)^2}{18}$.

La somme des aires est égale à $S(x) = \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{(1-x)^2}{18} = \dfrac{9x^2+8(1-x)^2}{144} = \dfrac{9x^2+8(1-2x+x^2)}{144} = \dfrac{17x^2-16x+8}{144}$.

2. La fonction S est définie sur [0 ; 1] puisque la ficelle mesure 1 m.

Le sommet de la parabole représentative de S a pour coordonnées : $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{16}{34} = \dfrac{8}{17}$ et

$\beta = S(\dfrac{8}{17}) = \dfrac{17(8/17)^2-16(8/17)+8}{144} = \dfrac{1}{34}$.

Le tableau de variations de cette fonction est :

x	0		$\frac{8}{17}$		1
$S(x)$	$\frac{8}{144}$	$\searrow$	$\frac{1}{34}$	$\nearrow$	$\frac{9}{144}$

La somme des aires est maximale $= \dfrac{9}{144}$ lorsque $x = 1$;

La somme des aires est minimale $= \dfrac{1}{34}$ lorsque $x = \dfrac{8}{17}$.

3. La somme des aires est supérieure à 500 cm^2 = 0,05 m^2 équivaut à $S(x) \geqslant 0{,}05$ équivaut à
$\dfrac{17x^2-16x+8}{144} \geqslant 0{,}05$ équivaut à $17x^2 - 16x + 8 \geqslant 0{,}05\times144$ équivaut à $17x^2 - 16x + 8 \geqslant 7{,}2$ équivaut à
$17x^2 - 16x + 0{,}8 \geqslant 0$; $\Delta = b^2 - 4ac = (-16)^2 - 4\times17\times0{,}8 = 201{,}6 > 0$, donc l'équation a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{16-\sqrt{201{,}6}}{2\times17} \simeq 0{,}053$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{16+\sqrt{201{,}6}}{2\times17} \simeq 0{,}889$.

On réalise un tableau de signes :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$17x^2 - 16x + 0{,}8$		+	0	$-$	0	+	

Ainsi, la somme des aires est supérieure ou égale à 500 cm^2 lorsque
$x \in [0 ; 0{,}053] \cup [0{,}889 ; 1]$
au millimètre près.