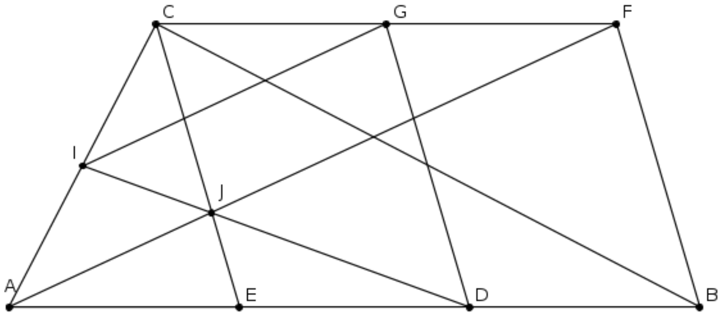
CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 3 PREMIÈRE S

EXERCICE 1 : On considère un triangle ABC quelconque et les points D, E, F, G, I et J définis par
$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; G est le milieu de [CF] ; $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$;
I est le milieu de [AC].

1. La figure :



2. Pour savoir si les points D, I et J sont alignés, on étudie la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{IJ}$:

$\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EJ} =$

$-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EC} =$

$-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} +$
$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{9}\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{9}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$; d'où $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DI}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires et les points D, I et J sont alignés.

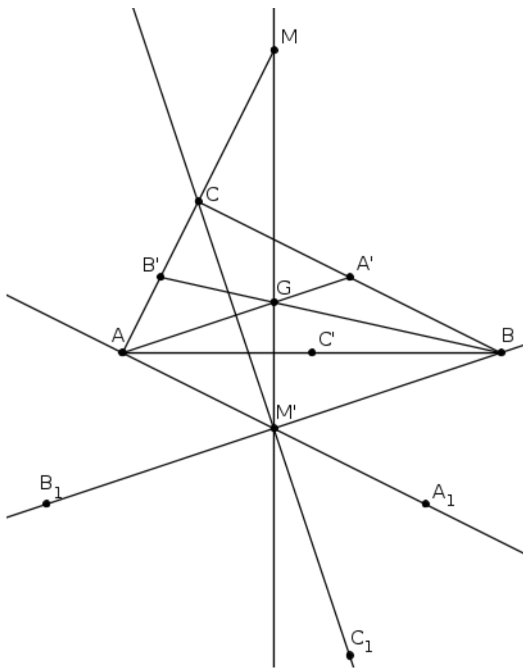
3. $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, et $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC})$
$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{9}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$; d'où $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AF}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires et les points A, J et F sont alignés.

4. On a vu que $\overrightarrow{DI} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{DI} = k\,\overrightarrow{BC}$, donc les droites (DI) et (BC) ne sont pas parallèles.

5. $\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, et
$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{GI}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires, donc les droites (GI) et (AF) sont parallèles.

EXERCICE 2 :On considère le triangle ABC ci-dessous,
A', B' et C' les milieux respectifs des côtés [BC], [CA] et [AB] et M le symétrique de A par rapport à C. On note A_1, B_1 et C_1 les symétriques du point M par rapport à A', B' et C'.

1. La figure complétée :



On considère le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$).

2. Les coordonnées des points de la figure :
A(0 ; 0) comme origine du repère ;
B(1 ; 0) puisque $\overrightarrow{AB}$ est le premier vecteur du repère ;
C(0 ; 1) puisque $\overrightarrow{AC}$ est le deuxième vecteur du repère ;
A'(0,5 ; 0,5) comme milieu de [BC] ;
B'(0 ; 0,5) comme milieu de [AC] ;
C'(0,5 ; 0) comme milieu de [AB] ;
M(0 ; 2) puisque C est le milieu de [AM] ;
$x_{A'} = \frac{x_M + x_{A_1}}{2} = \frac{0 + x_{A_1}}{2}$, donc $x_{A1} = 2\times0,5 = 1$;
et $y_{A'} = \frac{y_M + y_{A_1}}{2} = \frac{2 + y_{A_1}}{2}$, donc $y_{A1} = 2\times0,5 - 2 = -1$;
donc $A_1(1 ; -1)$.

$x_{B'} = \dfrac{x_M + x_{B_1}}{2} = \dfrac{0 + x_{B_1}}{2}$, donc $x_{B1} = 2\times 0 = 0$; et $y_{B'} = \dfrac{y_M + y_{B_1}}{2} = \dfrac{2 + y_{B_1}}{2}$, donc $y_{B1} = 2\times 0{,}5 - 2 = -1$;
donc $B_1(0 ; -1)$.
$x_{C'} = \dfrac{x_M + x_{C_1}}{2} = \dfrac{0 + x_{C_1}}{2}$, donc $x_{C1} = 2\times 0{,}5 = 1$; et $y_{C'} = \dfrac{y_M + y_{C_1}}{2} = \dfrac{2 + y_{C_1}}{2}$, donc $y_{C1} = 2\times 0 - 2 = -2$;
donc $C_1(1 ; -2)$.

3. Les équations cartésiennes des droites (AA_1), (BB_1) et (CC_1) :

Un vecteur directeur de la droite (AA_1) est $\overrightarrow{AA_1}$ $(1 ; -1)$; soit $M(x ; y)$ un point de cette droite, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ $(x ; y)$ et $\overrightarrow{AA_1}$ $(1 ; -1)$ sont colinéaires, d'où $-x - y = 0$, soit $x + y = 0$ est une équation cartésienne de la droite (AA_1).

Un vecteur directeur de la droite (BB_1) est $\overrightarrow{BB_1}$ $(-1 ; -1)$; soit $M(x ; y)$ un point de cette droite, les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ $(x - 1 ; y)$ et $\overrightarrow{BB_1}$ $(-1 ; -1)$ sont colinéaires, d'où $-1(x-1) + y = 0$, soit $-x + y + 1 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (BB_1).

Un vecteur directeur de la droite (CC_1) est $\overrightarrow{CC_1}$ $(1 ; -3)$; soit $M(x ; y)$ un point de cette droite, les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ $(x ; y - 1)$ et $\overrightarrow{CC_1}$ $(1 ; -3)$ sont colinéaires, d'où $-3x - 1(y - 1) = 0$, soit $-3x - y + 1 = 0$ ou $3x + y - 1 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (CC_1).

4. On cherche les coordonnées du point d'intersection des droites (AA_1) et (BB_1) en résolvant le système :
$\begin{cases} x + y = 0 \\ -x + y + 1 = 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y = -x \\ -x + (-x) + 1 = 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y = -x \\ -2x + 1 = 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y = -0{,}5 \\ x = 0{,}5 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x = 0{,}5 \\ y = -0{,}5 \end{cases}$;
le point M', intersection des droites (AA_1) et (BB_1) a pour coordonnées $M'(0{,}5 ; -0{,}5)$.

Ce point M' est-il sur la droite (CC_1) ? $3\times 0{,}5 + (-0{,}5) - 1 = 1{,}5 - 0{,}5 - 1 = 0$; donc M' est sur la droite (CC_1), ce qui prouve que les droites (AA_1), (BB_1) et (CC_1) sont concourantes en $M'(0{,}5 ; -0{,}5)$.

5. Soit G le centre de gravité du triangle ABC.

a) On a vu que $G\left(\dfrac{1}{3} ; \dfrac{1}{3}\right)$. Démarche : le point G est le point d'intersection des médianes du triangle ABC, donc le point d'intersection des droites (AA') et (BB'), d'équation : (AA') : $x - y = 0$ et (BB') : $x + 2y - 1 = 0$;
on résout le système : $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y = x \\ x + 2x - 1 = 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y = x \\ 3x = 1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$.

b) $\overrightarrow{MG}$ $\left(\dfrac{1}{3} ; \dfrac{-5}{3}\right)$ et $\overrightarrow{M'G}$ $\left(\dfrac{-1}{6} ; \dfrac{5}{6}\right)$. On vérifie que $\overrightarrow{MG} = 2\,\overrightarrow{M'G}$, donc les vecteurs sont colinéaires et les points M, M' et G sont alignés.