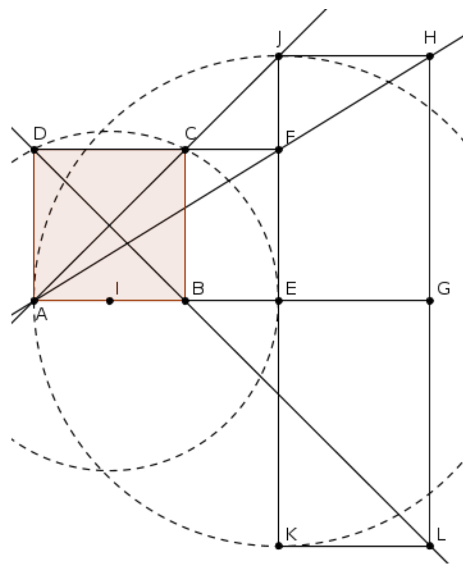
CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 4 PREMIÈRE S



Construction du carré ABCD de côté 1; Le point I est le milieu de [AB].
Le cercle de centre I passant par C coupe la demi-droite [AB) en E.
Construction du rectangle AEFD.

1. On sait que IC = IE et AE = AI + IE ; on calcule IC à l'aide du théorème de Pythagore dans le triangle ICB rectangle en B :

$IC^2 = IB^2 + BC^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$; d'où $IC = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$;

et $AE = AI + IE = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ appelé nombre d'or.

2. Les solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$: on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times1\times(-1) = 5 > 0$, donc l'équation a deux solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Donc AE est bien solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

3. Le cercle de centre E et de rayon AE coupe la droite (EF) en J et K (J et C sont d'un même côté de la droite (AB)). Le point G est sur la demi-droite [BE) tel que EG = AB.
Construction du rectangle EGHJ et le rectangle EGLK.

4. On se place dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
Coordonnées des points A(0 ; 0), B(1 ; 0), C(1 ; 1), D(0 ; 1) et I(0,5 ; 0).

On a $\overrightarrow{AE} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{AB}$, donc $E\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} ; 0\right)$.

AEFD est un rectangle, donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$, et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, donc $F\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} ; 1\right)$.

La droite (EF) a pour équation $x - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 0$, donc $x_J = x_K = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; comme J est sur le cercle de centre E et de rayon AE, $EJ = EA = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, donc $J\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} ; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EG} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{AB}$, donc $G\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} ; 0\right)$.

EGHJ est un rectangle donc $\overrightarrow{JH} = \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB}$, donc $x_H - x_J = 1$ et $y_H - y_J = 0$, donc $H\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} ; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$,

EGLK est un rectangle donc $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB}$, donc $x_L - x_K = 1$ et $y_L - y_K = 0$, donc $L\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} ; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Ainsi $\overrightarrow{AC}(1 ; 1)$ et $\overrightarrow{AJ}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} ; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$; on obtient $\overrightarrow{AJ} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{AC}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et les points A, C et J sont alignés.

5. $\overrightarrow{BD}(-1 ; 1)$ et $\overrightarrow{BL}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} ; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$; on obtient $\overrightarrow{BL} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{BD}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BL}$ sont colinéaires et les points B, D et L sont alignés.

6. $\overrightarrow{AF}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} ; 1\right)$ et $\overrightarrow{AH}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} ; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$; on obtient $\overrightarrow{AH} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{AF}$, (on vérifie que $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$) donc les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires et les points A, F et H sont alignés.