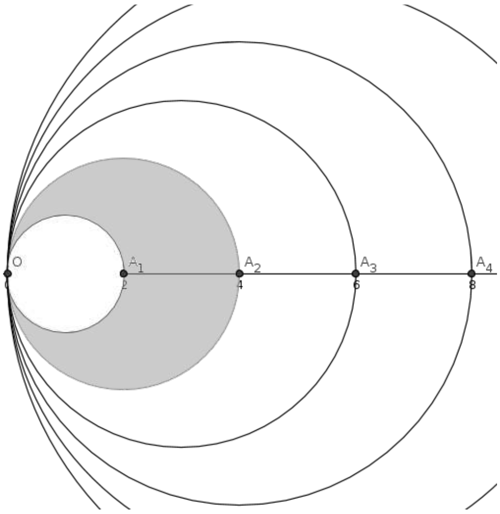
CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 5 PREMIÈRE S

EXERCICE 1 : La figure ci-contre est construite avec des cercles passant tous par le point O et par les points de coordonnées $A_1(2\ ;\ 0)$, $A_2(4\ ;\ 0)$, $A_3(6\ ;\ 0)$, … $A_n(2n\ ;\ 0)$.

On note u_1 l'aire du petit disque et pour $n \geqslant 2$, u_n est l'aire comprise entre deux cercles successifs, comme la partie grisée sur la figure qui correspond à u_2 .



1. On a u_2 = aire du disque de diamètre $[OA_2]$ – aire du petit disque = $\pi 2^2 - \pi 1^2 = 4\pi - 1\pi = 3\pi$;

ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$, u_n est égal à l'aire du disque de diamètre $[OA_n]$ – aire du disque de diamètre $[OA_{n-1}] = \pi n^2 - \pi(n-1)^2 =$ $\pi\,(n^2 - (n-1)^2\,) = \pi(n^2 - n^2 + 2n - 1) = \pi(2n-1)$;

Donc $u_n = \pi(2n-1)$.

2. u_n s'écrit comme une fonction affine de n, donc c'est une suite arithmétique de raison 2π et de premier terme $u_1 = \pi$.

3. Ainsi $u_{50} = \pi(2\times 50 - 1) = 99\,\pi$.

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} u_k = n\,\frac{u_1+u_n}{2} = n\,\frac{\pi+\pi(2n-1)}{2} = n\,\frac{\pi+2\pi n-\pi}{2} = n\,\pi\,n = \pi n^2$. Ce nombre est l'aire du disque de diamètre $[OA_n]$ qui correspond bien géométriquement à la somme des aires des parties grisées et de l'aire du petit disque.

EXERCICE 2 : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n+3}{2u_n-1}$.

1. Les trois premiers termes de la suite (u_n) : $u_1 = \dfrac{2u_0+3}{2u_0-1} = \dfrac{2\times 1+3}{2\times 1-1} = 5$; $u_2 = \dfrac{2u_1+3}{2u_1-1} = \dfrac{2\times 5+3}{2\times 5-1} = \dfrac{13}{9}$;

$$u_3 = \frac{2u_2+3}{2u_2-1} = \frac{2\times\left(\frac{13}{9}\right)+3}{2\times\left(\frac{13}{9}\right)-1} = \frac{\frac{26}{9}+3}{\frac{26}{9}-1} = \frac{\frac{53}{9}}{\frac{17}{9}} = \frac{53}{9}\times\frac{9}{17} = \frac{53}{17}\ .$$

2. A l'aide de la calculatrice, on obtient la table des valeurs de la suite jusqu'à u_{25} :

D'où $u_{25} = 2{,}18644726$ à 10^{-8} près.

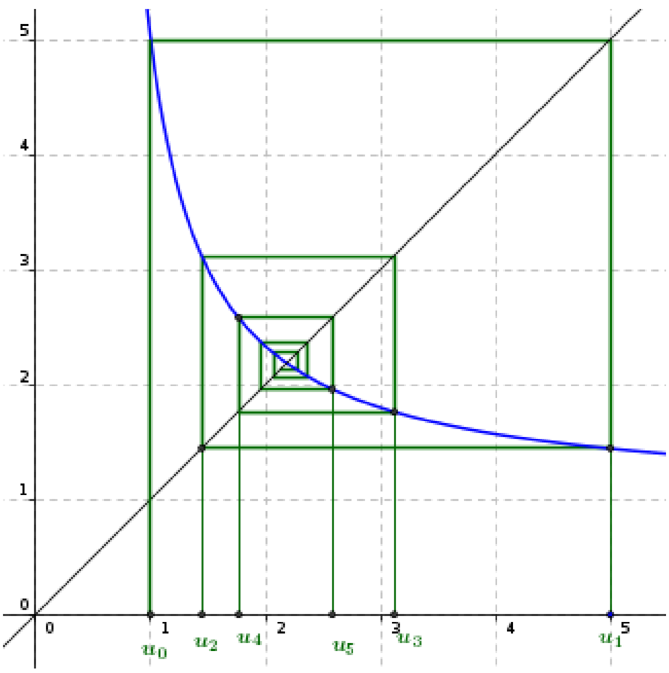
n	u_n
0	1
1	5
2	1,4444444444
3	3,1176470588
4	1,7640449438
5	2,5822222222
6	1,9605122732
7	2,3693825356
8	2,0698719828
9	2,2739892309
10	2,1274025598
11	2,2289522269
12	2,1567699609
13	2,207168193
14	2,1715307303
15	2,1965080651
16	2,1788921262
17	2,1912617665
18	2,1825490528
19	2,1886726254
20	2,1843621848
21	2,1873930786
22	2,1852602843
23	2,1867602997
24	2,1857049282
25	2,186447264

3. Ci-dessous, on a représenté la fonction f définie sur $[1\ ;+\infty\ [$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{2x-1}$.

a) A l'aide de cette représentation, on construit les cinq premiers termes de la suite :

b) D'après la représentation graphique, la suite est non monotone.

c) D'après la représentation graphique, la fonction f est décroissante sur $[1\ ;+\infty\ [$;



on le démontre : $f(x) = \dfrac{2x+3}{2x-1} = \dfrac{2x-1+4}{2x-1} = 1 + \dfrac{4}{2x-1}$;

Soit a et b deux réels de $[1\,;+\infty[$ tels que $1 < a < b$; alors $2 < 2a < 2b$,

$1 < 2a - 1 < 2b - 1$, $\dfrac{1}{2a-1} > \dfrac{1}{2b-1}$ (par la décroissance de la fonction inverse), $\dfrac{4}{2a-1} > \dfrac{4}{2b-1}$ et

$1 + \dfrac{4}{2a-1} > 1 + \dfrac{4}{2b-1}$, soit $f(a) > f(b)$, donc la fonction f est décroissante sur $[1\,;+\infty[$;

si $1 \leqslant u_0 \leqslant 5$, alors $2 \leqslant 2u_0 \leqslant 10$, $1 \leqslant 2u_0 - 1 \leqslant 9$, $1 \geqslant \dfrac{1}{2u_0-1} \geqslant \dfrac{1}{9}$, $4 \geqslant \dfrac{4}{2u_0-1} \geqslant \dfrac{4}{9}$,

$5 \geqslant 1 + \dfrac{4}{2u_0-1} \geqslant \dfrac{13}{9} > 1$, $5 \geqslant u_1 \geqslant 1$, donc $1 \leqslant u_1 \leqslant 5$.

d) On peut conjecturer que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 5$.

e) Graphiquement, la limite de la suite (u_n) semble être l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $y = x$;

f) Cette limite est solution de l'équation $\dfrac{2x+3}{2x-1} = x$, soit $2x + 3 = x(2x - 1)$ équivaut à $2x + 3 = 2x^2 - x$ équivaut à $2x^2 - 3x - 3 = 0$; on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\times2\times(-3) = 33 > 0$, donc l'équation a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-\sqrt{33}}{2\times2} = \dfrac{3-\sqrt{33}}{4} \simeq -0{,}686$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+\sqrt{33}}{4} \simeq 2{,}186$.

La limite est comprise entre 1 et 5, donc cette limite est égale à $\dfrac{3+\sqrt{33}}{4}$.