CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 6 PREMIÈRE S

EXERCICE 1 : Deux rues se coupent à angle droit en un point P. L'une a la direction Nord-Sud et l'autre la direction Est-Ouest. Une voiture venant de l'ouest passe en P à 10h à la vitesse constante de 30 km/h. Au même instant, une autre voiture, situé à 2 km au nord du croisement, se dirige vers le sud à 40 km/h.

1. On considère le repère (P, $\vec{i}$, $\vec{j}$) où $\vec{i}$ indique la direction Est-Ouest et le sens vers l'Est, $\vec{j}$ indique la direction Nord-Sud et le sens vers le Nord.

La première voiture est située sur l'axe des abscisses de coordonnées (d_1 ; 0) avec $d_1 = v_1t = 30t$ où t est le temps en heure.

La deuxième voiture est située sur l'axe des ordonnées de coordonnées (0 ; d_2) avec $d_2 = v_2t = 40t - 2$.

La distance entre les deux voitures est égale à $d(t) = \sqrt{(d_1-0)^2+(0-d_2)^2} = \sqrt{(30t)^2+(-40t+2)^2} = \sqrt{900t^2+1600t^2-160t+4} = \sqrt{2500t^2-160t+4}$. Cette fonction est définie lorsque $2500t^2 - 160t + 4 \geqslant 0$: on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-160)^2 - 4\times2500\times4 = -14400 < 0$, donc ce polynôme est toujours du signe de $a = 2500 > 0$. Donc la fonction d est définie sur $\mathbb{R}$.

On étudie le polynôme P défini par $P(t) = 2500t^2 - 160t + 4$: $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{160}{5000} = \frac{4}{125}$ et

$\beta = P(\frac{4}{125}) = 2500\left(\frac{4}{125}\right)^2 - 160\frac{4}{125} + 4 = 1{,}44$; comme $a = 2500 > 0$, le polynôme est décroissant sur

$]-\infty ; \frac{4}{125}]$ et croissant sur $[\frac{4}{125} ; +\infty[$; la fonction d a les mêmes variations, donc admet un minimum

lorsque $t = \frac{4}{125}$, ce minimum est égal à $d(\frac{4}{125}) = \sqrt{1{,}44} = 1{,}2$ km.

Les deux voitures sont les plus proches (à vol d'oiseau) l'une de l'autre au temps $t = \frac{4}{125} = 0{,}032$ h après 10 h, soit 10h 01 min 55 sec.

2. Cas général : On suppose que la première voiture roule à v_1 km/h et la deuxième à v_2 km/h.

La distance entre les deux voiture est égale à $d(t) = \sqrt{(d_1-0)^2+(0-d_2)^2} = \sqrt{(v_1t)^2+(2-v_2t)^2} = \sqrt{v_1^2t^2+4-4v_2t+v_2^2t^2} = \sqrt{(v_1^2+v_2^2)t^2-4v_2t+4}$. Cette fonction admet un minimum qui est le minimum du polynôme $(v_1^2+v_2^2)t^2-4v_2t+4$, atteint en $t = \frac{-b}{2a} = \frac{4v_2}{2(v_1^2+v_2^2)} = \frac{2v_2}{v_1^2+v_2^2}$.

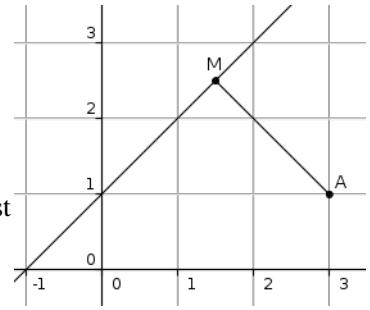
La distance minimale est $d\left(\frac{2v_2}{v_1^2+v_2^2}\right) = \sqrt{(v_1^2+v_2^2)\times\frac{(2v_2)^2}{(v_1^2+v_2^2)^2}-4v_2\frac{2v_2}{v_1^2+v_2^2}+4} = \sqrt{\frac{4v_2^2}{v_1^2+v_2^2}-\frac{8v_2^2}{v_1^2+v_2^2}+4} = \sqrt{\frac{-4v_2^2+4(v_1^2+v_2^2)}{v_1^2+v_2^2}} = \sqrt{\frac{4v_1^2}{v_1^2+v_2^2}} = \frac{2v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$.

3. On suppose que $v_1 = 30$ km/h. Dans ce cas, $d\left(\frac{2v_2}{v_1^2+v_2^2}\right) = \frac{60}{\sqrt{900+v_2^2}} \leqslant 1$, soit $60 \leqslant \sqrt{900+v_2^2}$; on élève au carré : $3600 \leqslant 900 + v_2^2$, soit $v_2^2 \geqslant 2700$, soit $v_2 \geqslant \sqrt{2700}$, soit $v_2 \geqslant 30\sqrt{3}$, soit environ $v_2 \geqslant 52$ km/h.

EXERCICE 2

On se place dans un repère orthonormé du plan.

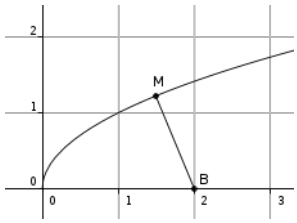
1. Soit M(x ; y) un point de la droite (d) ; on a $y = x + 1$; la distance AM = $\sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2}$ = $\sqrt{(3-x)^2 + (1-(x+1))^2}$ = $\sqrt{(3-x)^2 + (-x)^2}$ = $\sqrt{9 - 6x + x^2 + x^2}$ = $\sqrt{2x^2 - 6x + 9}$. Cette fonction a les mêmes variations que le polynôme P défini par P(x) = $2x^2 - 6x + 9$; α = $\frac{-b}{2a}$ = $\frac{6}{4}$ = 1,5 et β = P(1,5) = $2\times1{,}5^2 - 6\times1{,}5 + 9 = 4{,}5$; comme $a = 2 > 0$, le polynôme est décroissant sur] – ∞ ; 1,5] et croissant sur [1,5 ; +∞ [; la fonction donnant AM a les mêmes variations, donc admet un minimum lorsque $x = 1{,}5$ ce minimum est égal à $\sqrt{4{,}5} \simeq 2{,}12$.



Le point de la droite (d) d'équation $x - y + 1 = 0$ le plus proche du point A(3 ; 1) est le point d'abscisse 1,5 et d'ordonnée 2,5.

2. Soit M(x ; y) = M(x ; $\sqrt{x}$) un point de la courbe représentative de la fonction racine carrée;
la distance BM = $\sqrt{(x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2}$ = $\sqrt{(2-x)^2 + (0-\sqrt{x})^2}$ = $\sqrt{4 - 4x + x^2 + x}$ = $\sqrt{x^2 - 3x + 4}$ = $\sqrt{P(x)}$ où P est le polynôme défini par P(x) = $x^2 - 3x + 4$.

La fonction donnant BM a les mêmes variations que P ; α = $\frac{-b}{2a}$ = $\frac{3}{2}$ = 1,5 et β = P(1,5) = $1{,}5^2 - 3\times1{,}5 + 4 = 1{,}75$; comme $a = 1 > 0$, le polynôme est décroissant sur] – ∞ ; 1,5] et croissant sur [1,5 ; +∞ [; la fonction donnant BM a les mêmes variations, donc admet un minimum lorsque $x = 1{,}5$;
ce minimum est égal à $\sqrt{1{,}75} \simeq 1{,}32$.

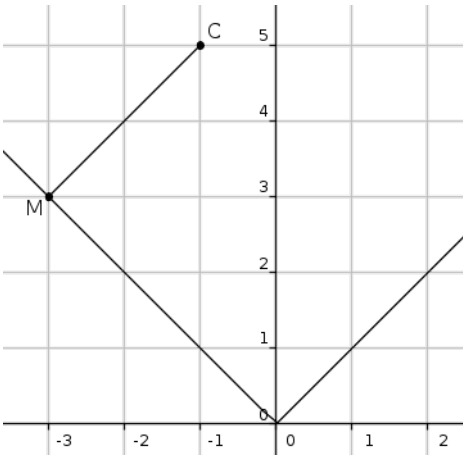


Le point de la courbe représentative de la fonction racine carrée le plus proche du point B(2 ; 0) est le point de coordonnées (1,5 ; $\sqrt{1{,}5}$).

3. Soit M(x ; y) = M(x ; $|x|$) un point de la courbe représentative de la fonction valeur absolue;
la distance CM = $\sqrt{(x_C - x_M)^2 + (y_C - y_M)^2}$ = $\sqrt{(-1-x)^2 + (5-|x|)^2}$ = $\sqrt{x^2 + 2x + 1 + 25 - 10|x| + x^2}$ = $\sqrt{2x^2 + 2x - 10|x| + 26}$.
Si $x > 0$, CM = $\sqrt{2x^2 + 2x - 10x + 26}$ = $\sqrt{2x^2 - 8x + 26}$.

Cette fonction a les mêmes variations que le polynôme P défini par P(x) = $2x^2 - 8x + 26$; α = $\frac{-b}{2a}$ = $\frac{8}{4}$ = 2 et β = P(2) = $2\times2^2 - 8\times2 + 26 = 18$; comme $a = 2 > 0$, le polynôme est décroissant sur] 0 ; 2] et croissant sur [2 ; +∞ [; la fonction donnant CM a les mêmes variations, donc admet un minimum lorsque $x = 2$; ce minimum est égal à $\sqrt{18} = 3\sqrt{2} \simeq 4{,}24$.

Si $x < 0$, CM = $\sqrt{2x^2 + 2x + 10x + 26}$ = $\sqrt{2x^2 + 12x + 26}$.
Cette fonction a les mêmes variations que le polynôme P défini par P(x) = $2x^2 + 12x + 26$;
α = $\frac{-b}{2a}$ = $\frac{-12}{4}$ = – 3 et β = P(– 3) = $2\times(-3)^2 + 12\times(-3) + 26 = 8$;
comme $a = 2 > 0$, le polynôme est décroissant sur] – ∞ ; – 3] et croissant sur [– 3 ; 0[; la fonction donnant CM a les mêmes variations, donc admet un minimum lorsque $x = -3$;
ce minimum est égal à $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \simeq 2{,}82$.



Le point de la courbe représentative de la fonction valeur absolue le plus proche du point C(– 1 ; 5) est le point de coordonnées (– 3 ; 3).