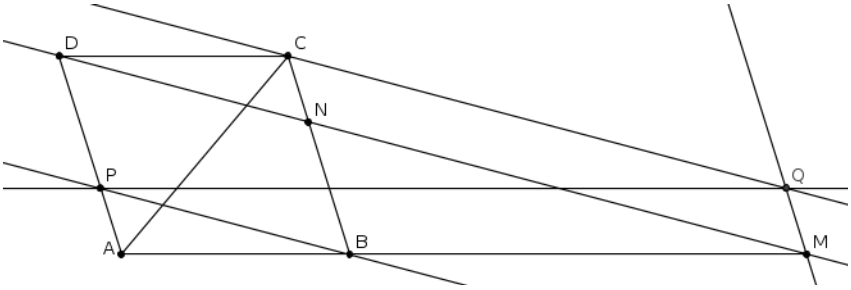
CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ N° 2 PREMIÈRE S

EXERCICE 1 : On considère le triangle ABC ci-dessous, et les points D, M, N et P définis par :

ABCD est un parallélogramme, $\overrightarrow{AM} = 3\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, et $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.



1. Construction des points D, M, N et P.
2. Les points M, N et D sont alignés si les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MD}$ sont colinéaires :
Comme ABCD est un parallélogramme, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;
d'où $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} =$
$-3\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} =$
$-3\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} =$
$-2\,\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} = -3\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. On trouve que $\overrightarrow{MD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MN}$;
donc les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MD}$ sont colinéaires et les points M, N et D sont alignés.
3. Dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$), A(0 ; 0), B(1 ; 0), C(1 ; 1), D(0 ; 1), M(3 ; 0), P(0 ; $\frac{1}{3}$) ;

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, donc N(1 ; $\frac{2}{3}$).

Un vecteur directeur de la droite (MN) est $\overrightarrow{MN}$ $(1-3\ ;\ \frac{2}{3}-0)$, soit $\overrightarrow{MN}$ $(-2\ ;\ \frac{2}{3})$.

Soit K(x ; y) un point de (MN) ; les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MK}$ $(x-3\ ;\ y)$ sont colinéaires, d'où $\frac{2}{3}(x-3) + 2y = 0$,

soit $\frac{2}{3}x + 2y - 2 = 0$ qui est une équation cartésienne de (MN).

Un vecteur directeur de la droite (BP) est $\overrightarrow{BP}$ $(0-1\ ;\ \frac{1}{3}-0)$, soit $\overrightarrow{BP}$ $(-1\ ;\ \frac{1}{3})$.

Soit L(x ; y) un point de (BP) ; les vecteurs $\overrightarrow{BP}$ et $\overrightarrow{BL}$ $(x-1\ ;\ y)$ sont colinéaires, d'où $\frac{1}{3}(x-1) + y = 0$,

soit $\frac{1}{3}x + y - \frac{1}{3} = 0$ ou $x + 3y - 1 = 0$ qui est une équation cartésienne de (BP).

4. Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BP}$ sont colinéaires : $\overrightarrow{MN} = 2\,\overrightarrow{BP}$, donc les droites (MN) et (BP) sont parallèles.

5. Soit Q le point tel que AMQP est un parallélogramme. Alors : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PQ}$,
d'où $x_Q - x_P = 3$ et $x_Q = 3$; $y_Q - y_P = 0$ et $y_Q = \frac{1}{3}$. D'où Q(3 ; $\frac{1}{3}$). Ainsi $\overrightarrow{CQ}$ $(3-1\ ;\ \frac{1}{3}-1)$, soit $\overrightarrow{CQ}$ $(2\ ;\ \frac{-2}{3})$,
On a donc $\overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{MN}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{CQ}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires, donc la droite (CQ) est parallèle aux droites (MN) et (BP).

EXERCICE 2 : Soit ABC un triangle, et A', B' et C' les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB].
Le point M est défini par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

On se place dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$), A(0 ; 0), B(1 ; 0), C(0 ; 1), M($\frac{1}{3}$; 0), A'(0,5 ; 0,5), B'(0 ; 0,5), C'(0,5 ; 0).
Un vecteur directeur de la droite (AA') est $\overrightarrow{AA'}$ (0,5 ; 0,5) ; soit P(x ; y) un point de la droite (AA') ; les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{AP}$ (x ; y) sont colinéaires, d'où $0{,}5x - 0{,}5y = 0$, ou $x - y = 0$ qui est une équation cartésienne de (AA').

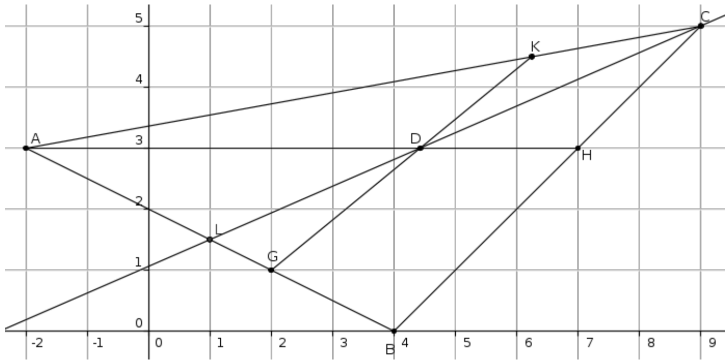
Un vecteur directeur de la droite (B'C') est $\overrightarrow{B'C'}$ (0,5 ; – 0,5) ; soit P(x ; y) un point de la droite (B'C') ; les vecteurs $\overrightarrow{B'C'}$ et $\overrightarrow{B'P}$ $(x\ ;\ y-0{,}5)$ sont colinéaires, d'où $-0{,}5x - 0{,}5(y-0{,}5) = 0$, soit $-0{,}5x - 0{,}5y + 0{,}25 = 0$,
ou $2x + 2y - 1 = 0$ qui est une équation cartésienne de (B'C').
Les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites vérifient le système :
$\begin{cases} x-y=0 \\ 2x+2y-1=0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y=x \\ 2x+2x-1=0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y=x \\ 4x-1=0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y=0{,}25 \\ x=0{,}25 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=0{,}25 \\ y=0{,}25 \end{cases}$; le point E, intersection des droites (AA') et (B'C') a pour coordonnées E(0,25 ; 0,25).

Un vecteur directeur de la droite (CM) est $\overrightarrow{CM}\left(\frac{1}{3}\ ; -1\right)$; soit P(x ; y) un point de la droite (CM) ; les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CP}$ (x ; y – 1) sont colinéaires, d'où $-x - \frac{1}{3}(y-1) = 0$, soit $-x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3} = 0$, ou $3x + y - 1 = 0$ qui est une équation cartésienne de (CM).

On a 30,25 + 0,25 – 1 = 0 donc les coordonnées du point E vérifient l'équation de la droite (CM), donc E est sur (CM) et les droites (AA'), (B'C') et (CM) sont concourantes en E.

EXERCICE 3 : On considère les points A(– 2 ; 3), B(4 ; 0) et C(9 ; 5) dans un repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) du plan.

Les points G, H et K sont définis par $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{HB} + 3\overrightarrow{HC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.



1. Les points dans le repère :

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, donc $x_G - x_A = \frac{2}{3}(x_B - x_A)$, d'où

$x_G = \frac{2}{3}(4-(-2)) + (-2) = 2$ et

$y_G - y_A = \frac{2}{3}(y_B - y_A)$, d'où $y_G = \frac{2}{3}(0-3) + 3 = 1$.

Donc G(2 ; 1).

$2\overrightarrow{HB} + 3\overrightarrow{HC} = \vec{0}$, donc $2(x_B - x_H) + 3(x_C - x_H) = 0$,
d'où $-5x_H + 2\times 4 + 3\times 9 = 0$, d'où $5x_H = 35$, $x_H = 7$;
$2(y_B - y_H) + 3(y_C - y_H) = 0$, d'où $-5y_H + 2\times 0 + 3\times 5 = 0$, d'où $5y_H = 15$, $y_H = 3$; d'où H(7 ; 3).

$\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$, donc $x_K - x_A = \frac{3}{4}(x_C - x_A)$, d'où $x_K = \frac{3}{4}(9-(-2)) + (-2) = \frac{25}{4}$ et

$y_K - y_A = \frac{3}{4}(y_C - y_A)$, d'où $y_K = \frac{3}{4}(5-3) + 3 = \frac{9}{2}$. Donc K$\left(\frac{25}{4}\ ;\ \frac{9}{2}\right)$.

2. $\overrightarrow{BC}$ (5 ; 5) et $\overrightarrow{BH}$ (3 ; 3) ; on a $3\times 5 - 5\times 3 = 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires,
donc les points B, C, H sont alignés. Ou : $2\overrightarrow{HB} + 3\overrightarrow{HC} = \vec{0}$ entraîne $\overrightarrow{HB} = -1{,}5\,\overrightarrow{HC}$ doc colinéaires.

3. a) Un vecteur directeur de la droite (GK) est $\overrightarrow{GK}\left(\frac{25}{4} - 2\ ;\ \frac{9}{2} - 1\right)$, soit $\overrightarrow{GK}\left(\frac{17}{4}\ ;\ \frac{7}{2}\right)$; soit M(x ; y) un point de la droite (GK) ; les vecteurs $\overrightarrow{GK}$ et $\overrightarrow{GM}$ (x – 2 ; y – 1) sont colinéaires, d'où $\frac{7}{2}(x-2) - \frac{17}{4}(y-1) = 0$,

soit $\frac{7}{2}x - 7 - \frac{17}{4}y + \frac{17}{4} = 0$, soit $\frac{7}{2}x - \frac{17}{4}y - \frac{11}{4} = 0$, ou $14x - 17y - 11 = 0$,
qui est une équation cartésienne de (GK).

Un vecteur directeur de la droite (BC) est $\overrightarrow{BC}$ (5 ; 5) ; soit M(x ; y) un point de la droite (BC) ; les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BM}$ (x – 4 ; y) sont colinéaires, d'où $5(x-4) - 5y = 0$, soit $5x - 20 - 5y = 0$, ou $x - y - 4 = 0$,
qui est une équation cartésienne de (BC).

b) On a $\frac{17}{4}\times 5 - 5\times\frac{7}{2} = \frac{85}{4} - \frac{35}{2} = \frac{15}{4} \neq 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{GK}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites (GK) et (BC) ne sont pas parallèles.

4. Soit D le point d'intersection des droites (GK) et (AH). Une équation de (AH) est $y - 3 = 0$.
Les coordonnées du point D vérifient le système :

$\begin{cases} y-3=0 \\ 14x-17y-11=0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y=3 \\ 14x-17\times 3-11=0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y=3 \\ 14x-62=0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y=3 \\ x=\frac{31}{7} \end{cases}$; le point D a pour coordonnées D$\left(\frac{31}{7}\ ;\ 3\right)$.

BONUS : La droite (CD) a pour équation $7x - 16y + 17 = 0$ et la droite (AB) : $x + 2y - 4 = 0$.
Les coordonnées de L sont L(1 ; 1,5). L est en fait le milieu de [AB].