

EXERCICE 1 : 1. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2u_n$.

a) La suite (u_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$; elle est strictement croissante.

$$b) \sum_{k=0}^{20} u_k = u_0 \frac{1-2^{20+1}}{1-2} = 2^{21} - 1 = 2097151.$$

2. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0 = 100$ et pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = v_n + 4$.

a) La suite (u_n) est arithmétique de raison 4 et de premier terme $v_0 = 100$; elle est strictement croissante.

De plus, pour tout entier naturel n , $v_n = v_0 + 4n = 100 + 4n$.

$$b) \sum_{k=0}^{100} v_k = (100 + 1) \frac{v_0 + v_{100}}{2} = 101 \frac{100 + 500}{2} = 30300.$$

3. A l'aide de la calculatrice, on trouve $u_7 = v_7 = 128$.

EXERCICE 2 : Pour chacune des fonctions suivantes, donner leur ensemble de définition, le tableau de variations sur leur ensemble de définition, et les éventuels extremums :

a) $f(x) = \sqrt{2-x}$; la fonction f est définie lorsque $2-x \geq 0$, soit $x \leq 2$. Donc $D_f =]-\infty ; 2]$.

La fonction affine $x \rightarrow 2-x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 2]$.

Elle admet un minimum égal à 0 atteint en $x = 2$.

b) $f(x) = |2x-5|$; la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Donc $D_f = \mathbb{R}$.

La fonction affine $x \rightarrow 2x-5$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule lorsque $x = 2,5$, donc f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 2,5]$ et croissante sur $]2,5 ; +\infty[$.

Elle admet un minimum égal à 0 atteint en $x = 2,5$.

c) $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$; la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Donc $D_f = \mathbb{R}$.

On a $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4 = (x+3)(x-1)$; la fonction $x \rightarrow x^2 + 2x - 3$ est strictement décroissante sur $]-\infty ; -1]$ et croissante sur $] -1 ; +\infty[$. Elle s'annule lorsque $x = 1$ et lorsque $x = -3$.

Donc la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty ; -3]$, croissante sur $] -3 ; -1]$, décroissante sur $] -1 ; 1]$ et croissante sur $] 1 ; +\infty[$.

Elle admet un minimum égal à 0 atteint en $x = -3$ et $x = 1$, et un maximum local égal à 4 atteint en $x = -1$.

d) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$; la fonction f est définie lorsque $1-x^2 \geq 0$, soit $x^2 \leq 1$, soit $-1 \leq x \leq 1$. Donc $D_f = [-1 ; 1]$.

La fonction $x \rightarrow 1-x^2$ est strictement croissante sur $]-\infty ; 0]$ et décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

Donc la fonction f est strictement croissante sur $] -1 ; 0]$, et strictement décroissante sur $] 0 ; 1]$.

Elle admet un minimum égal à 0 atteint en $x = -1$ et $x = 1$, et un maximum égal à 1 atteint en $x = 0$.

EXERCICE 3 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 8}$ et C sa courbe représentative.

1. La fonction f est définie lorsque $-x^2 + 2x + 8 \geq 0$;

on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-1) \times 8 = 36 = 6^2 > 0$, donc l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 6}{2 \times (-1)} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 6}{2 \times (-1)} = 4. \text{ D'où le signe de } -x^2 + 2x + 8 :$$

Donc $D_f = [-2 ; 4]$.

x	0	-2	4	$+\infty$	
$-x^2 + 2x + 8$	$-$	0	$+$	0	$-$

2. Résolution des équations :

a) $f(x) = -x + 5$ équivaut à $\sqrt{-x^2 + 2x + 8} = -x + 5$;

on élève au carré : $-x^2 + 2x + 8 = (-x + 5)^2$

équivaut à $-x^2 + 2x + 8 = x^2 - 10x + 25$ équivaut à $-2x^2 + 12x - 17 = 0$;

le discriminant $\Delta = 12^2 - 4 \times (-2) \times 17 = 4 = 2^2 > 0$, donc l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12 + 2}{2 \times (-2)} = 2,5 \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12 - 2}{2 \times (-2)} = 3,5. \text{ D'où } S = \{2,5 ; 3,5\}.$$

b) $f(x) = \sqrt{x+4}$ équivaut à $\sqrt{-x^2 + 2x + 8} = x + 4$; on élève au carré : $-x^2 + 2x + 8 = (x + 4)^2$ équivaut à

$-x^2 + 2x + 8 = x^2 + 8x + 16$ équivaut à $2x^2 + 6x + 8 = 0$; le discriminant $\Delta = 6^2 - 4 \times 2 \times 8 = -28 < 0$, donc l'équation n'a pas de solution. D'où $S = \emptyset$.