CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ N° 6 PREMIÈRE S

EXERCICE 1 :

1. Si $f(x) = 2x^2 - 4x$, alors f est dérivable en a réel, et $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{2(a+h)^2-4(a+h)-(2a^2-4a)}{h} =$
$\dfrac{2(a^2+2ah+h^2)-4a-4h-2a^2+4a}{h} = \dfrac{4ah+2h^2-4h}{h} = \dfrac{h(4a+2h-4)}{h} = 4a + 2h - 4$.

2. Le nombre dérivé de la fonction inverse en $x = 2$ est $\dfrac{-1}{4}$ puisque la dérivée de $x \to \dfrac{1}{x}$ est $x \to \dfrac{-1}{x^2}$.

3. La fonction $\dfrac{u}{v}$ définie et dérivable sur I admet pour dérivée $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ (cours).

4. Si la fonction f est dérivable et admet un maximum en a, alors $f'(a) = 0$ (cours).

5. Si la droite d'équation $y = mx + p$ est tangente à C au point d'abscisse a, alors $f'(a) = m$ (cours).

6. Soit f la fonction définie sur $? \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1} = \dfrac{u}{v}$ est
$f'(x) = \dfrac{u'v-uv'}{v^2} = \dfrac{2(x-1)-1(2x-1)}{(x-1)^2} = \dfrac{2x-2-2x+1}{(x-1)^2} = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$.

EXERCICE 2 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{8}{x}$.

1. La fonction dérivée de f est $f'(x) = 2 - \dfrac{8}{x^2} = \dfrac{2x^2-8}{x^2} = \dfrac{2(x^2-4)}{x^2} = \dfrac{2(x-2)(x+2)}{x^2}$.

2. $f'(x) = \dfrac{2(x-2)(x+2)}{x^2}$ est du signe de $(x-2)(x+2)$, qui s'annule en 2 et – 2.

D'où le tableau de variations de la fonction f :

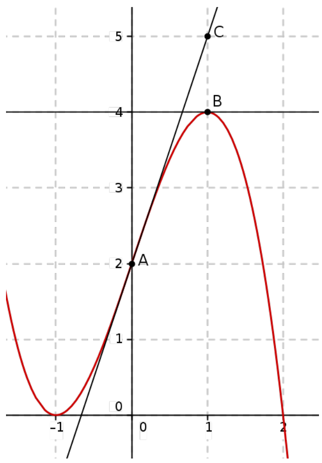
x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	-9	↘	‖	↘	7	↗	

3. La fonction f admet un maximum local égal à – 9 atteint en $x = -2$ et un minimum local égal à 7 atteint en $x = 2$.

EXERCICE 3 : Sur la courbe ci-contre, les points A(0 ; 2) et B(1 ; 4) sont sur la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a, b, c et d des réels.
La tangente à la courbe en A passe par C(1 ; 5) ; la tangente en B est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Par lecture graphique, on trouve $f(0) = 2$, $f'(0) = 3$ (coefficient directeur de la tangente en A), $f(1) = 4$, $f'(1) = 0$.

2. On a donc $f(0) = d = 2$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; donc $f'(0) = c = 3$;
$f(1) = a + b + c + d = a + b + 3 + 2 = 4$, soit $a + b = -1$;
$f'(1) = 3a + 2b + c = 3a + 2b + 3 = 0$, soit $3a + 2b = -3$.
On obtient le système :
$\begin{cases} a+b=-1 \\ 3a+2b=-3 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} b=-1-a \\ 3a+2(-1-a)=-3 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} b=-1-a \\ a-2=-3 \end{cases}$
équivaut à $\begin{cases} b=0 \\ a=-1 \end{cases}$. Donc $f(x) = -x^3 + 3x + 2$.



3. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse – 2 est égal à $f'(-2) = -9$ puisque $f'(x) = -3x^2 + 3$.