CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 2 PREMIÈRE S

Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points A(– 2 ; 2), B(2 ; 4) et C(– 1 ; – 4).

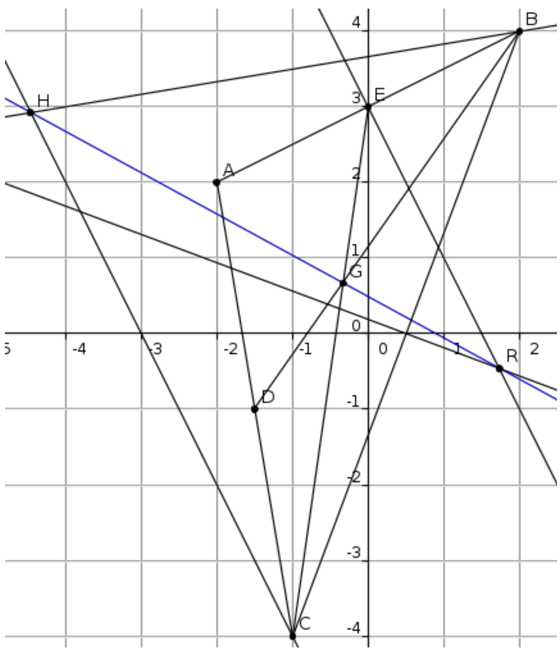
1. Soit M(x ; y) un point de la médiatrice du segment [AB]. On sait que AM = BM, soit $AM^2 = BM^2$; on a $AM^2 = (x+2)^2 + (y-2)^2$ et $BM^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2$, d'où $(x+2)^2 + (y-2)^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2$.

2. On développe : $x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16$;
on simplifie $4x - 4y + 8 = -4x - 8y + 20$; d'où $8x + 4y - 12 = 0$; on simplifie : $2x + y - 3 = 0$ qui est donc une équation cartésienne de la médiatrice de [AB].

3. Soit M(x ; y) un point de la médiatrice du segment [BC]. On sait que BM = CM, soit $BM^2 = CM^2$; on a $BM^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2$ et $CM^2 = (x+1)^2 + (y+4)^2$ et , d'où $(x-2)^2 + (y-4)^2 = (x+1)^2 + (y+4)^2$;
on développe : $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + 2x + 1 + y^2 + 8y + 16$;
on simplifie $-4x - 8y + 20 = 2x + 8y + 17$; d'où $6x + 16y - 3 = 0$ qui est donc une équation cartésienne de la médiatrice de [BC].

4. Le point R est le point d'intersection des médiatrices de [AB] et [BC] ; ses coordonnées vérifient le système d'équations :

$\begin{cases} 2x+y=3 \\ 6x+16y=3 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y=3-2x \\ 6x+16(3-2x)=3 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y=3-2x \\ -26x+48=3 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y=3-2x \\ x=45/28 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y=-6/13 \\ x=45/26 \end{cases}$. Donc R($\frac{45}{26}$; $\frac{-6}{13}$).



5. La hauteur issue de C est parallèle à la médiatrice de [AB] puisque toutes les deux perpendiculaires à [AB] ; donc un vecteur directeur de cette hauteur est $\vec{u}$ (1 ; – 2) ; soit M(x ; y) un point de cette hauteur ; les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{CM}$ ($x+1$; $y+4$) sont colinéaires, donc $-2(x+1)-(y+4)=0$, soit $2x + y + 6 = 0$ qui est une équation cartésienne de la hauteur issue de C.

La hauteur issue de A est parallèle à la médiatrice de [BC] puisque toutes les deux perpendiculaire à [BC] ; donc un vecteur directeur de cette hauteur est $\vec{v}$ (16 ; – 6) ; soit M(x ; y) un point de cette hauteur ; les vecteurs $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AM}$ ($x+2$; $y-2$) sont colinéaires, donc $-6(x+2)-16(y-2)=0$,
soit $6x + 16y - 20 = 0$, soit $3x + 8y - 10 = 0$ qui est une équation cartésienne de la hauteur issue de A.

6. Le point H est le point d'intersection des hauteurs précédentes ; ses coordonnées vérifient le système d'équations :

$\begin{cases} 2x+y=-6 \\ 3x+8y=10 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y=-6-2x \\ 3x+8(-6-2x)=10 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y=-6-2x \\ -13x=58 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y=\frac{38}{13} \\ x=\frac{-58}{13} \end{cases}$.

Donc H($\frac{-58}{13}$; $\frac{38}{13}$).

7. On a vu que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, d'où $\begin{cases} x_A-x_G+x_B-x_G+x_C-x_G=0 \\ y_A-y_G+y_B-y_G+y_C-y_G=0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 3x_G=x_A+x_B+x_C \\ 3y_G=y_A+y_B+y_C \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x_G=\frac{-1}{3} \\ y_G=\frac{2}{3} \end{cases}$; donc G($\frac{-1}{3}$; $\frac{2}{3}$).

8. On obtient $\overrightarrow{GR}$ ($\frac{161}{78}$; $\frac{-44}{39}$) et $\overrightarrow{GH}$ ($\frac{-161}{39}$; $\frac{88}{39}$) ; $xy'-x'y = \frac{161}{78}\times\frac{88}{39} - \frac{-44}{39}\times\frac{-161}{39} =$
$\frac{161\times44-44\times161}{39^2}$ = 0 ; donc les vecteurs $\overrightarrow{GR}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont colinéaires, et les points R, G et H sont alignés.