CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 3 PREMIÈRE S

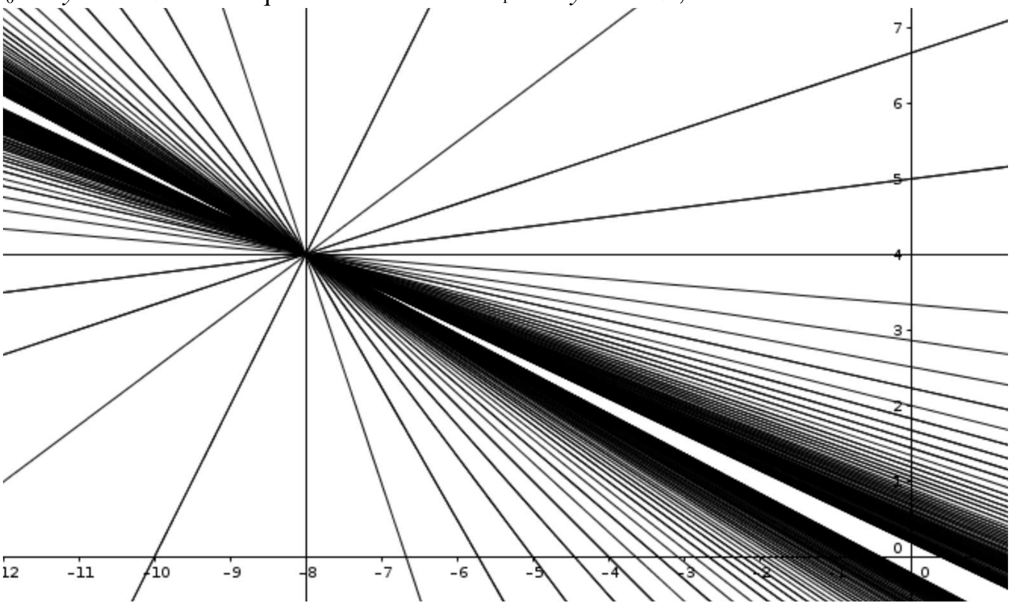
EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère orthogonal. On considère l'ensemble D_m des points $M(x; y)$ dont les coordonnées vérifient la relation $mx + (2m - 1)y + 4 = 0$ avec m réel.

1. Cet ensemble s'écrit sous la forme $ax + by + c = 0$ qui est l'équation cartésienne d'une droite avec a et b non tous les deux nuls, donc l'ensemble D_m est une droite.
2. Les coordonnées d'un vecteur directeur de D_m sont $(-b\ ;\ a)$, soit $(2m - 1\ ;\ -m)$.
3. Une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est parallèle à l'un des axes si $a = 0$ ou bien si $b = 0$; donc D_m est parallèle à l'un des axes du repère si $m = 0$ ou si $2m - 1 = 0$ soit $m = 0{,}5$.
4. Une équation de la droite D_0 : $-y + 4 = 0$ et une équation de la droite D_1 : $x + y + 4 = 0$; les coordonnées de leur point d'intersection vérifient le système :

$\begin{cases} -y+4=0 \\ x+y+4=0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y=4 \\ x+8=0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=-8 \\ y=4 \end{cases}$.

Les coordonnées du point d'intersection des deux droites D_0 et D_1 sont $(-8\ ;\ 4)$.



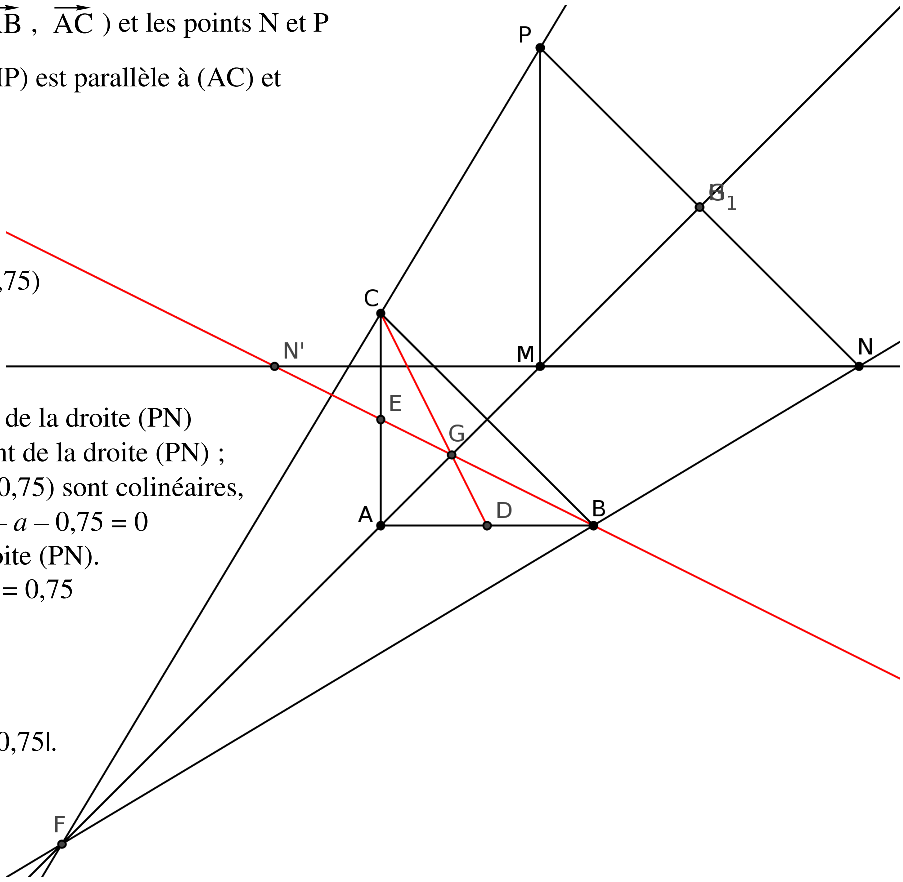
5. Pour tout réel m, en remplaçant x et y par les coordonnées du point d'intersection précédent, on obtient

$-8m + (2m - 1)4 + 4 = -8m + 8m - 4 + 4 = 0$; donc D_m passe par le point $(-8\ ;\ 4)$ quelque soit la valeur du réel m.

EXERCICE 2

Sur la figure ci-dessous ABC est un triangle rectangle isocèle en A. On considère un point M dont les coordonnées sont $\left(\frac{3}{4}\ ;\ \frac{3}{4}\right)$ dans le repère $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC})$ et les points N et P tel que (MN) est parallèle à (AB), (MP) est parallèle à (AC) et (NP) est parallèle à (BC).

1. La figure avec MN = 1,5AB :



2. On pose $x_N = a$, l'ordonnée de N est celle de M = 0,75 car les vecteurs $\overrightarrow{AB}\ (1\ ;\ 0)$ et $\overrightarrow{MN}\ (a - 0{,}75\ ;\ y_N - 0{,}75)$ sont colinéaires,
soit $1(y_N - 0{,}75) - 0(a - 0{,}75) = 0$,
soit $y_N - 0{,}75 = 0$, soit $y_N = 0{,}75$.
$\overrightarrow{BC}\ (-1\ ;\ 1)$ est un vecteur directeur de la droite (PN) parallèle à (BC) ; soit $R(x\ ;\ y)$ un point de la droite (PN) ; les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{NR}\ (x - a\ ;\ y - 0{,}75)$ sont colinéaires, d'où $x - a + y - 0{,}75 = 0$, d'où $x + y - a - 0{,}75 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (PN).
Comme P a la même abscisse que M = 0,75 alors $0{,}75 + y_P - a - 0{,}75 = 0$,
d'où $y_P = a$. Donc $P(0{,}75\ ;\ a)$.
$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = \sqrt{(a - 0{,}75)^2 + (0{,}75 - 0{,}75)^2} = |a - 0{,}75|$.

$\overrightarrow{AM}\ (0{,}75\ ;\ 0{,}75)$ est un vecteur directeur de la droite (AM) ;

soit R(x ; y) un point de la droite (AM) ;
les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AR}$ (x ; y) sont colinéaires, d'où $0{,}75x - 0{,}75y = 0$, d'où $x - y = 0$ est une équation cartésienne de la droite (AM).

$\overrightarrow{BN}$ ($a - 1$; 0,75) est un vecteur directeur de la droite (BN) ; soit R(x ; y) un point de la droite (BN) ;
les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{BR}$ ($x - 1$; y) sont colinéaires, d'où $0{,}75(x - 1) - y(a - 1) = 0$, d'où $0{,}75x + (1 - a)y - 0{,}75 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (BN).

$\overrightarrow{CP}$ (0,75 ; $a - 1$) est un vecteur directeur de la droite (CP) ; soit R(x ; y) un point de la droite (CP) ;
les vecteurs $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{CR}$ (x ; $y - 1$) sont colinéaires, d'où $0{,}75(y - 1) - x(a - 1) = 0$, d'où $(a - 1)x - 0{,}75y - 0{,}75 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (CP).

Les droites (AM) et (BN) sont parallèles si et seulemetn si $ab' - a'b = (1 - a) - (-1)0{,}75 = 1{,}75 - a = 0$, soit $a = 1{,}75$, et dans ce cas, MN = $|a - 0{,}75| = 1$, soit MN = AB.

Donc si MN $\neq$ AB, alors les droites (AM) et (BN) sont sécantes en un point F vérifiant le système
$\begin{cases} x-y=0 \\ 0{,}75\,x+(1-a)\,y-0{,}75=0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=y \\ 0{,}75\,y+(1-a)\,y-0{,}75=0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=y \\ (1{,}75-a)\,y=0{,}75 \end{cases}$ équivaut à
$\begin{cases} x=\dfrac{0{,}75}{1{,}75-a} \\ y=\dfrac{0{,}75}{1{,}75-a} \end{cases}$. Donc F($\dfrac{0{,}75}{1{,}75-a}$; $\dfrac{0{,}75}{1{,}75-a}$). Les coordonnées de F vérifient l'équation de (CP) :
$(a - 1)\dfrac{0{,}75}{1{,}75-a} - 0{,}75\dfrac{0{,}75}{1{,}75-a} + 0{,}75 = \dfrac{(a-1)0{,}75-0{,}75^2+0{,}75(1{,}75-a)}{1{,}75-a} =$
$\dfrac{0{,}75a-0{,}75-0{,}5625+1{,}3125-0{,}75a}{1{,}75-a} = 0$. Donc les droites (AM), (BN) et (CP) sont concourantes en F.

3. F est le centre de gravité du triangle ABC si F($\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{1}{3}$). Dans ce cas, $\dfrac{0{,}75}{1{,}75-a} = \dfrac{1}{3}$ équivaut à $2{,}25 = 1{,}75 - a$ équivaut à $a = -0{,}5$. Donc dans ce cas, N($-0{,}5$; 0,75).