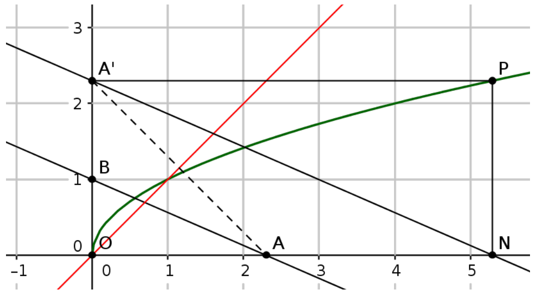
EXERCICE 1 : On considère un réel a positif.
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i} , \vec{j})$, on considère le point A(a ; 0) et le point B(0 ; 1).
Le point A' est le symétrique de A par rapport à la droite (d) d'équation $x - y = 0$.
La droite parallèle à (AB) passant par A' coupe l'axe des abscisses en N.



1. A'(0 ; a) ; $\overrightarrow{AB}$ $(-a ; 1)$ est un vecteur directeur de la droite (A'N).
Soit M(x ; y) un point de (A'N) ; les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'M}$ $(x ; y-a)$ sont colinéaires, d'où $x + a(y-a) = 0$, soit $x + ay - a^2 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (A'N). Le point N est sur l'axe des abscisses, donc son ordonnée est nulle et son abscisse vérifie l'équation $x - a^2 = 0$, soit $x = a^2$. Donc P(a^2 ; a).
2. Lorsque $a \in [0 ; +\infty[$ l'ordonnée de P est égale à la racine carrée de son abscisse, donc le point P est sur la courbe représentative de la fonction racine carrée.

EXERCICE 2 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{-x^2+2x+3}$.
1. La fonction f est définie lorsque $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$; on résout cette inéquation :
le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\times(-1)\times3 = 16 = 4^2 > 0$, donc l'équation a deux solutions :

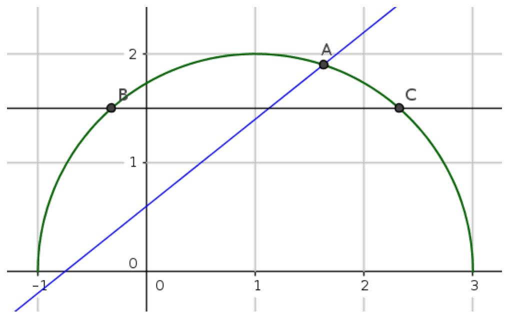
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2-4}{2\times(-1)} = 3$

et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2+4}{2\times(-1)} = -1$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
P(x)		$-$	0	+	0	$-$	

Donc l'ensemble de définition de f est $[-1 ; 3]$.

2. Les variations de la fonction $x \rightarrow -x^2 + 2x + 3$ qui est un polynôme du second degré dont la courbe représentative a pour sommet (1 ; 4) est croissante sur $[-1 ; 1]$ et décroissante sur $[1 ; 3]$. La fonction racine carrée conserve l'ordre, donc la fonction f est croissante sur $[-1 ; 1]$ et décroissante sur $[1 ; 3]$.
3. La courbe représentative de la fonction f est en fait un demi-cercle de centre (1 ; 0) et de rayon 2 :



4. L'équation $f(x) = 1,5$ équivaut à $\sqrt{-x^2+2x+3} = 1,5$.
On élève au carré : $-x^2 + 2x + 3 = 1,5^2$ équivaut à $-x^2 + 2x + 0,75 = 0$;
le discriminant $\Delta = 2^2 - 4\times(-1)\times0,75 = 7 > 0$, donc l'équation a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2+\sqrt{7}}{2\times(-1)} = \dfrac{2-\sqrt{7}}{2}$ et

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2-\sqrt{7}}{2\times(-1)} = \dfrac{2+\sqrt{7}}{2}$. D'où S = $\left\{ \dfrac{2-\sqrt{7}}{2} ; \dfrac{2+\sqrt{7}}{2} \right\}$.

5. Les abscisses du ou des points d'intersection de la courbe C et de la droite (d) représentative de la fonction g définie par $g(x) = 0,8x + 0,6$ vérifient l'équation : $\sqrt{-x^2+2x+3} = 0,8x + 0,6$. On élève au carré :
$-x^2 + 2x + 3 = (0,8x + 0,6)^2$ équivaut à $-x^2 + 2x + 3 = 0,64x^2 + 0,96x + 0,36$ équivaut à $-1,64x^2 + 1,04x - 2,64 = 0$
le discriminant $\Delta = 1,04^2 - 4\times(-1,64)\times(-2,64) = 18,4 > 0$, donc l'équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1,04+\sqrt{18,4}}{2\times(-1,64)} = \dfrac{1,04-\sqrt{18,4}}{3,28} \simeq -0,99$ et

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1,04-\sqrt{18,4}}{2\times(-1,64)} = \dfrac{1,04+\sqrt{18,4}}{3,28} \simeq 1,625$.

De plus $f(x_1) \simeq 0,2$ alors que $g(x_1) \simeq -0,2$; et $f(x_2) = g(x_2)$;
donc la courbe C et la droite (d) se coupent en un seul point de coordonnées A(x_1 ; $f(x_1)$).