CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 6 PREMIÈRE S

EXERCICE 1 : On considère la suite numérique $(u_n)$ définie sur N par $u_0 = 1000$ et $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 90$.

1. On a $u_1 = 0{,}9u_0 + 90 = 0{,}9\times1000 + 90 = 990$, $u_2 = 0{,}9u_1 + 90 = 0{,}9\times990 + 90 = 981$, $u_3 = 0{,}9u_2 + 90 = 972{,}9$.

2. Comme $u_1 - u_0 = 10$ et $u_2 - u_1 = 9$, il n'existe pas de nombre réel $r$ tel que $u_{n+1} = u_n + r$, donc la suite $(u_n)$ n'est pas arithmétique.

Comme $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{990}{1000} = 0{,}99$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{981}{990} = 0{,}990909$, il n'existe pas de nombre réel $q$ tel que $u_{n+1} = qu_n$ , donc la suite $(u_n)$ n'est pas géométrique.

3. On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = u_n - 900$.

a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 900 = 0{,}9u_n + 90 - 900 = 0{,}9u_n - 810 = 0{,}9(u_n - 900) = 0{,}90v_n$ .

Donc la suite $(v_n)$ est géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = u_0 - 900 = 100$.

b) On peut donc écrire $v_n = 100\times0{,}9^n$ , puis $u_n = v_n + 900 = 100\times0{,}9^n + 900$.

4. Lorsque $n$ devient très grand, le nombre $0{,}9^n$ tend vers 0, donc la suite $(u_n)$ tend vers 900.

5. A l'aide de la calculatrice, le plus petit entier naturel $n$ tel que $u_n \leq 901$ est $n = 44$ (voir feuille de tableur ci-contre).

| $n$ | $u_n$ |
|---|---|
| 0 | 1000 |
| 1 | 990 |
| 2 | 981 |
| 3 | 972,9 |
| 4 | 965,61 |
| 5 | 959,05 |
| 6 | 953,14 |
| 7 | 947,83 |
| 8 | 943,05 |
| 9 | 938,74 |
| 10 | 934,87 |
| 11 | 931,38 |
| 12 | 928,24 |
| 13 | 925,42 |
| 14 | 922,88 |
| 15 | 920,59 |
| 16 | 918,53 |
| 17 | 916,68 |
| 18 | 915,01 |
| 19 | 913,51 |
| 20 | 912,16 |
| 21 | 910,94 |
| 22 | 909,85 |
| 23 | 908,86 |
| 24 | 907,98 |
| 25 | 907,18 |
| 26 | 906,46 |
| 27 | 905,81 |
| 28 | 905,23 |
| 29 | 904,71 |
| 30 | 904,24 |
| 31 | 903,82 |
| 32 | 903,43 |
| 33 | 903,09 |
| 34 | 902,78 |
| 35 | 902,50 |
| 36 | 902,25 |
| 37 | 902,03 |
| 38 | 901,82 |
| 39 | 901,64 |
| 40 | 901,48 |
| 41 | 901,33 |
| 42 | 901,20 |
| 43 | 901,08 |
| 44 | 900,97 |

EXERCICE 2 : On considère la suite numérique $(u_n)$ définie sur N par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{3+u_n}$ .

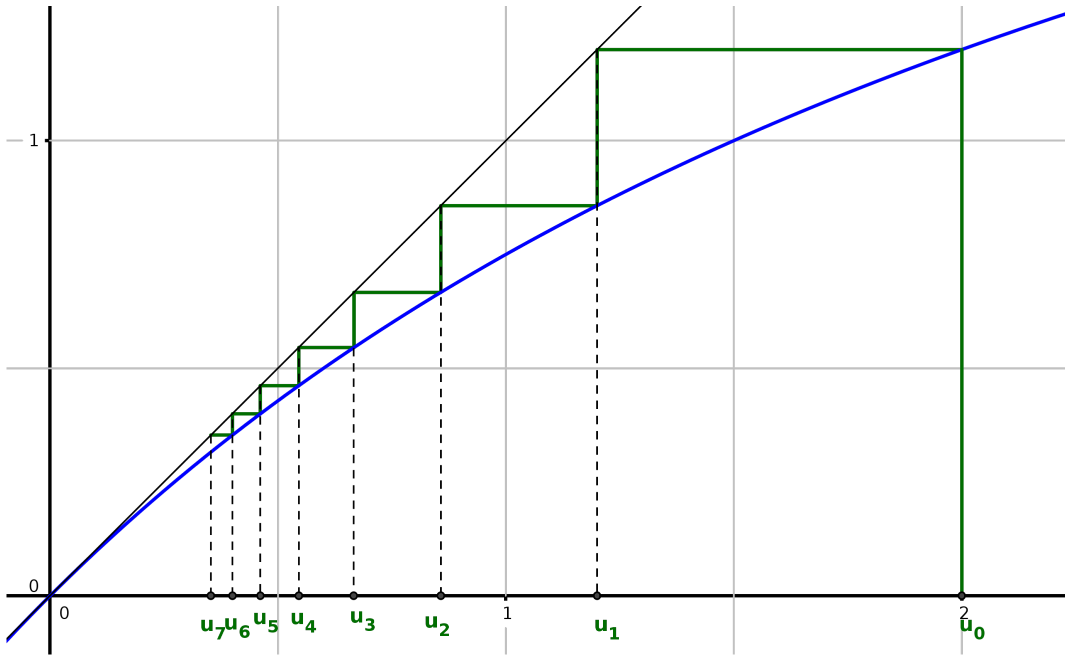
1. $u_1 = \dfrac{3u_0}{3+u_0} = \dfrac{3\times2}{3+2} = \dfrac{6}{5} = 1{,}2$ ; $u_2 = \dfrac{3u_1}{3+u_1} = \dfrac{3\times1{,}2}{3+1{,}2} = \dfrac{3{,}6}{4{,}2} = \dfrac{6}{7}$ ;

$$u_3 = \frac{3u_2}{3+u_2} = \frac{3\times\frac{6}{7}}{3+\frac{6}{7}} = \frac{\frac{18}{7}}{\frac{27}{7}} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3} .$$

2. Comme $u_1 - u_0 = -0{,}8$ et $u_2 - u_1 = \dfrac{-12}{35} \neq -0{,}8$ ; il n'existe pas de nombre réel $r$ tel que $u_{n+1} = u_n + r$, donc la suite $(u_n)$ n'est pas arithmétique.

Comme $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{1{,}2}{2} = 0{,}6$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{5}{7} \neq 0{,}6$ ; il n'existe pas de nombre réel $q$ tel que $u_{n+1} = qu_n$ , donc la suite $(u_n)$ n'est pas géométrique.

3. Représentation graphique des sept premiers termes de la suite $(u_n)$ :




4. Conjecture : la suite $(u_n)$ est décroissante.

5. On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ .

a) $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{3+u_n}{3u_n} = \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{3} = v_n + \dfrac{1}{3}$ .

Donc la suite $(v_n)$ est arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0} = 0{,}5$.

b) On peut donc écrire $v_n = v_0 + \dfrac{1}{3}n = 0{,}5 + \dfrac{1}{3}n$, puis $u_n = \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{0{,}5+\dfrac{n}{3}} = \dfrac{3}{1{,}5+n}$ .

c) Pour tout entier naturel $n$,
$u_{n+1} - u_n = \dfrac{3}{1{,}5+n+1} - \dfrac{3}{1{,}5+n} = \dfrac{3(1{,}5+n)-3(1{,}5+n+1)}{(1{,}5+n+1)(1{,}5+n)} = \dfrac{-3}{(1{,}5+n+1)(1{,}5+n)} < 0$ puisque le numérateur est strictement négatif et le dénominateur est strictement positif puisque $n$ est un entier naturel ;
donc $u_{n+1} - u_n < 0$, soit $u_{n+1} < u_n$ et la suite $(u_n)$ est décroissante.
Autre méthode : on a $u_n = \dfrac{3}{1{,}5+n} = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{3}{1{,}5+x}$ définie sur $[0 ; +\infty[$ ; cette fonction est décroissante sur $[0 ; +\infty[$ comme inverse d'une fonction affine $x \to 1{,}5 + x$ qui est croissante.

6. On a $n \geq 0$ équivaut à $1{,}5 + n \geq 1{,}5$ équivaut à $0 < \dfrac{1}{1{,}5+n} \leq \dfrac{1}{1{,}5}$ équivaut à $0 < \dfrac{3}{1{,}5+n} \leq \dfrac{3}{1{,}5}$ équivaut à $0 < \dfrac{3}{1{,}5+n} \leq 2$.

7. La suite admet une limite qui est 0 ; en effet, lorsque $n$ devient très grand, $1{,}5 + n$ devient aussi très grand et $\dfrac{3}{1{,}5+n}$ s'approche de 0.