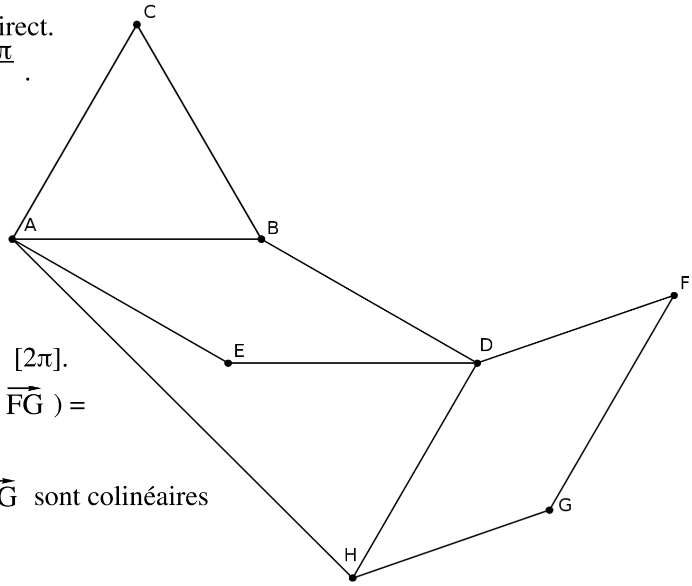
CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 7 PREMIÈRE S

EXERCICE 1 : On considère le triangle ABC équilatéral direct.



1. Construction du losange ABDE avec $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AE}) = \dfrac{-\pi}{6}$.

2. Construction du point H tel que $(\overrightarrow{DB}\ ;\ \overrightarrow{DH}) = \dfrac{\pi}{2}$ et DB = DH.

3. Construction du parallélogramme DHGF direct.

4. On sait que $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{HD}$ car DHGF est un parallélogramme ; et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}$ car ABDE est un losange.

Ainsi $(\overrightarrow{AE}\ ;\ \overrightarrow{GF}) = (\overrightarrow{BD}\ ;\ \overrightarrow{HD}) = (\overrightarrow{DB}\ ;\ \overrightarrow{DH}) = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

5. $(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{FG}) = (\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{AE}\ ;\ \overrightarrow{FG}) = \dfrac{-\pi}{3} + \dfrac{-\pi}{6} + \pi + \dfrac{\pi}{2} = \pi$ $[2\pi]$.

6. Comme $(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{FG}) = \pi$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont colinéaires et les droites (AC) et (FG) sont parallèles.

EXERCICE 2 : On considère le segment [AB] ci-dessous tel que AB = 1 unité.

1. Construction des points C, D, E, F, H définis par $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{2}$ et AB = AC ;
$(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BD}) = \dfrac{\pi}{6}$ et $(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CD}) = \dfrac{\pi}{6}$; $(\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CE}) = \dfrac{\pi}{6}$ et $(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BE}) = \dfrac{-\pi}{3}$;
$(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BF}) = \dfrac{-\pi}{3}$ et $(\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CF}) = \dfrac{\pi}{3}$; $(\overrightarrow{EF}\ ;\ \overrightarrow{EH}) = \dfrac{-\pi}{2}$ et EF = EH.

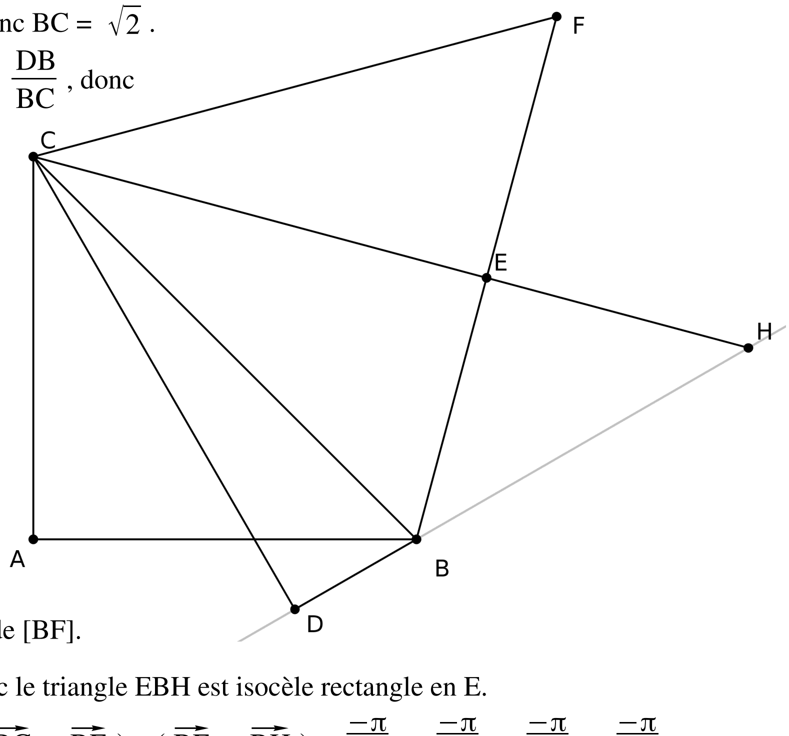
2. En utilisant la relation de Chasles, on obtient $(\overrightarrow{DB}\ ;\ \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{DB}\ ;\ \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{DC})$.

3. On en déduit $(\overrightarrow{DB}\ ;\ \overrightarrow{DC}) = \pi + (\overrightarrow{BD}\ ;\ \overrightarrow{BA}) + \pi + (\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CD}) = \pi + \dfrac{-\pi}{6} + \pi + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6} = 2\pi + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$. Donc le triangle DBC est rectangle en D.

4. $(\overrightarrow{EB}\ ;\ \overrightarrow{EC}) = (\overrightarrow{EB}\ ;\ \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{EC}) = \pi + (\overrightarrow{BE}\ ;\ \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CE}) = \pi + \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3\pi}{2} = \dfrac{-\pi}{2}$ $[2\pi]$. Donc le triangle EBC est rectangle en E.

$(\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CD}) = \dfrac{-\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{-\pi}{12}$ $[2\pi]$.

5. Comme AB = AC = 1 et ABC rectangle en A, donc BC = $\sqrt{2}$.



Dans le triangle DBC rectangle en D, $\sin(\widehat{DCB}) = \dfrac{DB}{BC}$, donc

$DB = BC \times \sin(\widehat{DCB}) = \sqrt{2} \times \sin(\dfrac{\pi}{12})$.

Dans le triangle BEC rectangle en E,

$\sin(\widehat{ECB}) = \dfrac{EB}{BC}$, donc

$EB = BC \times \sin(\widehat{ECB}) = \sqrt{2} \times \sin(\dfrac{\pi}{6}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

6. $(\overrightarrow{FC}\ ;\ \overrightarrow{FB}) = (\overrightarrow{FC}\ ;\ \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{FB}) = \pi + (\overrightarrow{CF}\ ;\ \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BF}) = \pi + \dfrac{-\pi}{3} + \dfrac{-\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$.

7. D'après $(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BF}) = \dfrac{-\pi}{3}$ et $(\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CF}) = \dfrac{\pi}{3}$, le triangle BCF est équilatéral ;

de plus $(\overrightarrow{EB}\ ;\ \overrightarrow{EC}) = \dfrac{-\pi}{2}$, donc E est le milieu de [BF].

Ainsi, EB = EF = EH, et $(\overrightarrow{EF}\ ;\ \overrightarrow{EH}) = \dfrac{-\pi}{2}$, donc le triangle EBH est isocèle rectangle en E.

$(\overrightarrow{BD}\ ;\ \overrightarrow{BH}) = (\overrightarrow{BD}\ ;\ \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BE}) + (\overrightarrow{BE}\ ;\ \overrightarrow{BH}) = \dfrac{-\pi}{6} + \dfrac{-\pi}{4} + \dfrac{-\pi}{3} + \dfrac{-\pi}{4} = -\pi$ $[2\pi]$, donc les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires, donc les points D, B et H sont alignés.