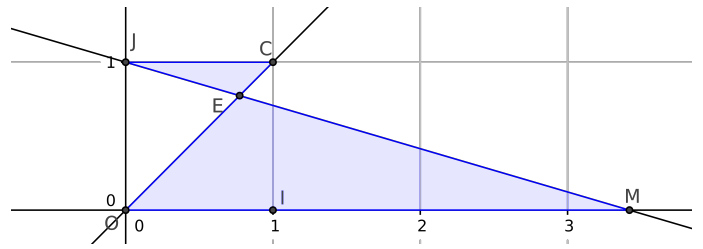


EXERCICE 1 : On considère le repère (O ; I, J) orthonormé, le point C(1 ; 1) et le point M sur la demi-droite [OI) d'abscisse a . Les droites (OC) et (JM) se coupent en E.

1. La droite (OC) a pour équation $y = x$. La droite (JM) a pour équation $y = mx + p$ avec

$$m = \frac{y_M - y_J}{x_M - x_J} = \frac{0 - 1}{a - 0} = \frac{-1}{a}$$

et $p = y_J - mx_J = 1 - 0 = 1$; donc (JM) : $y = x \frac{-1}{a} + 1$.



L'abscisse du point d'intersection des deux droites vérifie l'équation $\frac{-1}{a}x + 1 = x$ équivaut à $\frac{-1}{a}x + 1 - x = 0$

équivaut à $\frac{-1-a}{a}x + 1 = 0$ équivaut à $\frac{-1-a}{a}x = -1$ équivaut à $x = \frac{-a}{-1-a} = \frac{a}{1+a}$. Son ordonnée est $\frac{a}{1+a}$.

2. L'aire du triangle OEM est égale à $\frac{OM \times EH}{2} = \frac{a \times a/(1+a)}{2}$ et l'aire du triangle ECJ est égale à

$$\frac{JC \times (1 - EH)}{2} = \frac{1 \times (1 - a/(1+a))}{2}.$$

Donc la somme des aires est égale à $\frac{1}{2}a \times \frac{a}{1+a} + \frac{1}{2}(1 - \frac{a}{1+a}) = \frac{a^2 + 1 + a - a}{2(1+a)} = \frac{a^2 + 1}{2(1+a)}$.

3. On note f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2(1+x)}$.

a) La fonction dérivée de f est

$$f'(x) = \frac{2x \times 2(1+x) - 2(x^2 + 1)}{4(1+x)^2} = \frac{4x + 4x^2 - 2x^2 - 2}{4(1+x)^2} = \frac{2x^2 + 4x - 2}{4(1+x)^2} = \frac{x^2 + 2x - 1}{2(1+x)^2}.$$

b) Cette dérivée est du signe du numérateur car le dénominateur est strictement positif.

Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8 > 0$, donc l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{8}}{2} = -1 + \sqrt{2}.$$

Le signe de ce numérateur :

x	$-\infty$	$-1 - \sqrt{2}$	$-1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$x^2 + 2x - 1$	+	0	0	+

D'où le tableau de variations de f sur son ensemble de définition :

x	0	$-1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0,5	$\sqrt{2} - 1$	

4. Le minimum de la somme des aires des triangles ECJ

et OEM est égal à $f(-1 + \sqrt{2}) = \frac{(-1 + \sqrt{2})^2 + 1}{2(1 - 1 + \sqrt{2})} =$

$$\frac{1 - 2\sqrt{2} + 2 + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1,$$

atteint pour $a = \sqrt{2} - 1$.

5. La somme des aires est égale à 10 si $\frac{x^2 + 1}{2(1+x)} = 10$ équivaut à $x^2 + 1 = 20(1+x)$ équivaut à $x^2 - 20x - 19 = 0$.

Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4 \times 1 \times (-19) = 476 > 0$, donc l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{20 - \sqrt{476}}{2} = \frac{20 - 2\sqrt{119}}{2} = 10 - \sqrt{119} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{20 + \sqrt{476}}{2} = 10 + \sqrt{119}.$$

EXERCICE 2 : On inscrit dans une sphère de rayon 3 cm un cylindre comme sur la figure ci-contre.

La sphère a pour centre le point O et pour diamètre [BB'].

Le point M sur [OB] est le centre du disque de base du cylindre et M' est le symétrique de M par rapport à O.

1. Soit A le point sur la base du cylindre contenant M et sur la sphère.

Le triangle OAM est rectangle en M ; on applique le théorème de Pythagore : $AM^2 = OA^2 - OM^2 = 3^2 - x^2$.

Donc le rayon du disque de base du cylindre est égal à $r = \sqrt{9 - x^2}$.

Le volume V de ce cylindre est égal à

aire du disque de rayon $r = AM$ fois la hauteur $MM' =$

$$\pi(9 - x^2)2x = \pi(18x - 2x^3).$$

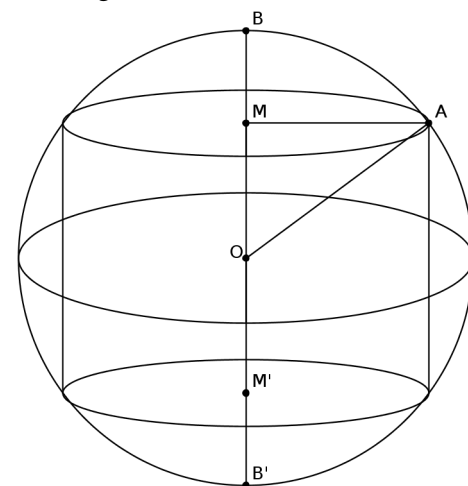
2. L'ensemble de définition de la fonction V est l'intervalle $[0 ; 3]$ puisque M est sur un rayon de la sphère de rayon 3.

3. La fonction dérivée de V est $V'(x) = \pi(18 - 6x^2) = 6\pi(3 - x^2)$ qui s'annule en $x = \sqrt{3}$ et en $x = -\sqrt{3}$.

4. Le signe de cette dérivée est du signe de $a = -6\pi < 0$ sur

$]-\infty ; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3} ; +\infty[$ et positif sur $[-\sqrt{3} ; \sqrt{3}]$.

D'où le tableau de variations de V sur son ensemble de définition :



x	0	$\sqrt{3}$	3
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$12\pi\sqrt{3}$	0

4. Le maximum de la fonction V est $12\pi\sqrt{3}$ atteint pour $x = \sqrt{3}$.

5. Le volume du cylindre est égal à la moitié du volume de la sphère si $V(x) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi 3^3 = 18\pi$ équivaut à

$$\pi(18x - 2x^3) = 18\pi \text{ équivaut à } 18x - 2x^3 = 18 \text{ équivaut à } 2x^3 - 18x + 18 = 0 \text{ équivaut à } x^3 - 9x + 9 = 0.$$

On étudie la fonction g définie par $g(x) = x^3 - 9x + 9$ sur l'intervalle $[0 ; 3]$.

Sa dérivée est $3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3)$ qui s'annule en $x = \sqrt{3}$ et en $x = -\sqrt{3}$.

4. Le signe de cette dérivée est du signe de $a = 3 > 0$ sur $]-\infty ; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3} ; +\infty[$ et négatif sur $[-\sqrt{3} ; \sqrt{3}]$.

D'où le tableau de variations de g sur $[0 ; 3]$:

x	0	$\sqrt{3}$	3
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	9	$9 - 6\sqrt{3}$	9

$$g(\sqrt{3}) = 9 - 6\sqrt{3} \simeq -1,39 < 0.$$

La fonction g est décroissante sur $[0 ; \sqrt{3}]$ et passe de 9 à une valeur négative, donc l'équation $g(x) = 0$ a une solution sur cet intervalle. A l'aide de la calculatrice, on trouve $x \simeq 1,1848$.

La fonction g est croissante sur $[\sqrt{3} ; 3]$ et passe d'une valeur négative à 9, donc l'équation $g(x) = 0$ a une solution sur cet intervalle. A l'aide de la calculatrice, on trouve $x \simeq 2,2266$.

Ainsi, le volume du cylindre est égal à la moitié du volume de la sphère lorsque $x \simeq 1,1848$ et $x \simeq 2,2266$.