CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ N° 1 PREMIÈRE S

EXERCICE 1 : On considère le polynôme P défini par $P(x) = -x^2 + 2x + 2$ et le polynôme Q dont la représentation graphique a pour sommet $S(-2 ; -3)$ et passant par $A(0 ; 5)$.

1.La forme canonique de $Q(x)$ est $a(x+2)^2 - 3$; $A(0 ; 5)$ est sur la parabole, donc $Q(0) = 5$, soit $a(0+2)^2 - 3 = 5$, soit $4a - 3 = 5$, soit $4a = 8$, soit $a = 2$. Donc $Q(x) = 2(x+2)^2 - 3 = 2(x^2 + 4x + 4) - 3 = 2x^2 + 8x + 5$ qui est la forme développée.

2. Les coordonnées du sommet de la parabole représentative de P sont $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{-2} = 1$ et

$\beta = P(1) = -1^2 + 2\times1 + 2 = 3$. Donc $S(1 ; 3)$.

3. Le tableau de variations de $P(x)$:
Comme $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

et celui de $Q(x)$:
Comme $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$Q(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

4. L'équation $P(x) = 0$ équivaut à $-x^2 + 2x + 2 = 0$;
on calcule le discriminant
$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\times(-1)\times2 = 12 > 0$, donc l'équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2+\sqrt{12}}{2\times(-1)} = \dfrac{-2+2\sqrt{3}}{-2} = 1 - \sqrt{3}$ et

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2-\sqrt{12}}{2\times(-1)} = \dfrac{-2-2\sqrt{3}}{-2} = 1 + \sqrt{3}$. Donc $S = \{1 - \sqrt{3} ; 1 + \sqrt{3}\}$.

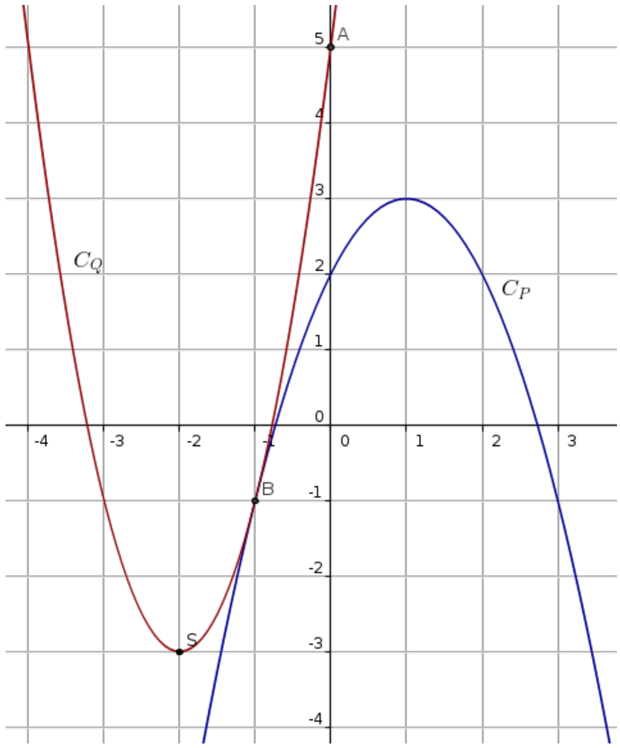
L'équation $Q(x) = 0$ équivaut à $2x^2 + 8x + 5 = 0$; on calcule $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4\times2\times5 = 24 > 0$, donc l'équation a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8+\sqrt{24}}{2\times2} = \dfrac{-8+2\sqrt{6}}{4} = -2 + \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8-\sqrt{24}}{2\times2} = -2 - \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Donc $S = \{-2 - \dfrac{\sqrt{6}}{2} ; -2 + \dfrac{\sqrt{6}}{2}\}$.

6. Tableau de signes de $P(x)$ et de $Q(x)$:

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		$-2-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$		$-2+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	



7. Pour déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection des paraboles représentant P et Q, on résout l'équation $P(x) = Q(x)$ équivaut à $-x^2 + 2x + 2 = 2x^2 + 8x + 5$ équivaut à $-3x^2 - 6x - 3 = 0$; on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4\times(-3)\times(-3) = 0$, donc l'équation a une unique solution : $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{6}{2\times(-3)} = -1$.

L'ordonnée est $P(-1) = -(-1)^2 + 2\times(-1) + 2 = -1 - 2 + 2 = -1$.

Les deux paraboles se coupent au point B de coordonnées $(-1 ; -1)$.

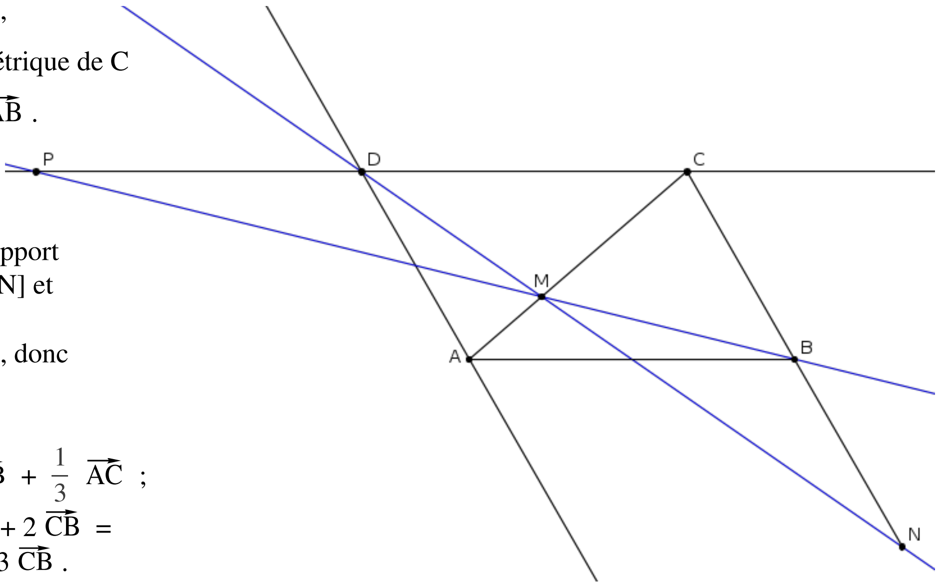
8. L'inéquation $P(x) \geqslant Q(x)$ équivaut à $-3x^2 - 6x - 3 \geqslant 0$; d'après la question précédente, on obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-3x^2 - 6x - 3$		$-$	0	$-$	

D'où la solution : $S = \{-1\}$.

EXERCICE 2 :
Soient x et y les dimensions du rectangle ; alors le périmètre = $2x + 2y = 20$ cm et l'aire = $xy = 21$ cm^2 .
D'où $x + y = 10$, soit $y = 10 - x$; on remplace dans l'autre équation : $x(10 - x) = 21$ équivaut à $-x^2 + 10x - 21 = 0$.
On calcule $\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4\times(-1)\times(-21) = 16 = 4^2 > 0$, donc l'équation a deux solutions :
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10+4}{2\times(-1)} = 3$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10-4}{2\times(-1)} = 7$. D'où $y_1 = 10 - 3 = 7$ et $y_2 = 10 - 7 = 3$.
Donc les dimensions d'un rectangle dont le périmètre est égal à 20 cm et l'aire est égale à 21 cm^2 sont 3 et 7 cm..

EXERCICE 3 : On considère le triangle ABC ci-dessous, et les points D, M, N et P définis par :
ABCD est un parallélogramme,
$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, N est le symétrique de C par rapport à B et $\overrightarrow{CP} = -2\overrightarrow{AB}$.



1. Construction des points D, M, N et P :
N est le symétrique de C par rapport à B, donc B est le milieu de [CN] et $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{CB}$.
ABCD est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

2. $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$;
et $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{CB}$.
Donc $3\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DN}$;
les vecteurs $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{DN}$ sont colinéaires, donc les points M, N et D sont alignés.

3. $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$;
et $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{BA}$. Donc $3\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BP}$; les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BP}$ sont colinéaires, donc les points B, M et P sont alignés.

4. D est le milieu de [PC], donc la droite (DN) est une médiane du triangle CPN ; B est le milieu de [CN], donc la droite (BP) est une médiane du triangle CPN ; le point M est sur chacune des droites (CN) et (BP), donc c'est le centre de gravité du triangle CPN.