

EXERCICE 1 : On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$.

1. On a $u_1 = 0,5u_0 + 3 = 0,5 \times 1 + 3 = 3,5$, $u_2 = 0,5u_1 + 3 = 0,5 \times 3,5 + 3 = 4,75$, $u_3 = 0,5u_2 + 3 = 5,375$.

2. Comme $u_1 - u_0 = 2,5$ et $u_2 - u_1 = 1,25$ il n'existe pas de nombre réel r tel que $u_{n+1} = u_n + r$, donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

Comme $\frac{u_1}{u_0} = \frac{2,5}{1} = 2,5$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{4,75}{3,5} = 1,357$, il n'existe pas de nombre réel q tel que $u_{n+1} = qu_n$,

donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

3. a) Représentation graphique des cinq premiers termes de (u_n) :

b) On conjecture que la suite (u_n) est croissante.

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 6$.

a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = 0,5u_n + 3 - 6 = 0,5u_n - 3 = 0,5(u_n - 6) = 0,5v_n$.

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = -5$.

b) On peut donc écrire $v_n = -5 \times 0,5^n$,

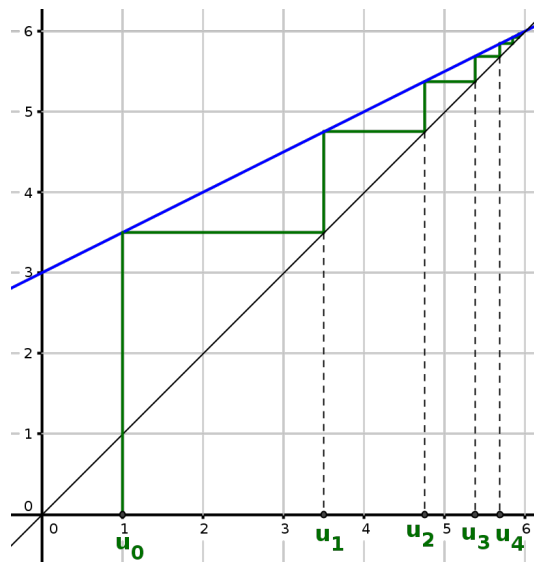
puis $u_n = v_n + 6 = -5 \times 0,5^n + 6$.

c) Pour tout entier naturel n ,

$u_{n+1} - u_n = -5 \times 0,5^{n+1} + 6 - (-5 \times 0,5^n + 6) = -5 \times 0,5^{n+1} + 5 \times 0,5^n = 5 \times 0,5^n (-0,5 + 1) = 5 \times 0,5^n (0,5) > 0$ puisque chaque facteur est strictement positif ; donc $u_{n+1} - u_n > 0$, soit $u_{n+1} > u_n$ et la suite (u_n) est croissante.

5. Lorsque n devient très grand, le nombre $0,5^n$ tend vers 0, donc la suite (u_n) tend vers 6.

5. A l'aide de la calculatrice, le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 5,9$ est $n = 6$ (voir feuille de tableur ci-contre).



EXERCICE 2 : 1. Les points D, E, F et G sur le cercle trigonométrique ci-contre définis à l'aide des angles en radian suivants :

$$\widehat{AOD} = \frac{10\pi}{3} \rightarrow \frac{-2\pi}{3} ; \widehat{AOE} = \frac{11\pi}{4} \rightarrow \frac{3\pi}{4} ;$$

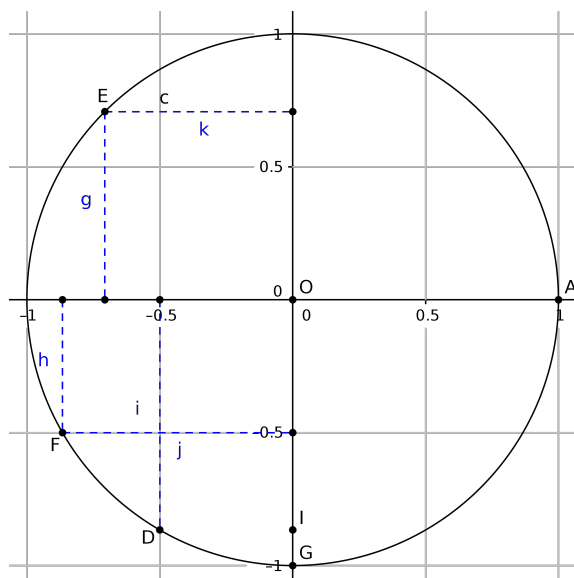
$$\widehat{AOF} = \frac{19\pi}{6} \rightarrow \frac{-5\pi}{6} ; \widehat{AOG} = \frac{21\pi}{6} \rightarrow \frac{-\pi}{2} .$$

2. On en déduit les cosinus et sinus des angles :

$$\cos(\widehat{AOD}) = \frac{-1}{2} ; \sin(\widehat{AOD}) = \frac{-\sqrt{3}}{2} ;$$

$$\cos(\widehat{AOE}) = \frac{-\sqrt{2}}{2} ; \sin(\widehat{AOE}) = \frac{\sqrt{2}}{2} ;$$

$$\cos(\widehat{AOF}) = \frac{-\sqrt{3}}{2} ; \sin(\widehat{AOF}) = \frac{-1}{2} .$$



EXERCICE 3 : Résolution dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes :

a) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\frac{\pi}{6}) ; S = \{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{-\pi}{6} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \}.$

b) $\sin(x) = \sin(\frac{\pi}{2}) ; S = \{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \}.$

c) $2\sin(x) - 1 = 0$ équivaut à $\sin(x) = \frac{1}{2} = \sin(\frac{\pi}{6}) ; S = \{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \}.$

d) $\cos(x) = \sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\frac{\pi}{6}) ; S = \{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{-\pi}{6} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \}.$