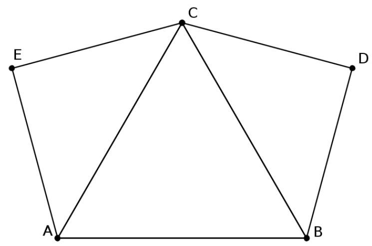
CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ N° 6 PREMIÈRE S

EXERCICE 1 : La figure ci-contre est composée du triangle ABC équilatéral, BCD est isocèle rectangle en D, ACE est isocèle rectangle en E.



Donner la mesure principale des angles de vecteurs :

a) Le triangle AEC est isocèle rectangle en E, donc $(\overrightarrow{AE}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = \dfrac{-\pi}{4}\ [2\pi]$;

b) Les points A et E sont à égale distance de B et C, donc ils sont sur la médiatrice de [BC] ; comme ABC est équilatéral, la médiatrice de [BC] est aussi bissectrice de l'angle $\widehat{BAC} = 60°$; donc $(\overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE}) = (\overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AE}) = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{12}\ [2\pi]$;

c) $(\overrightarrow{AE}\ ;\ \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AE}\ ;\ \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AE}\ ;\ \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB}) = \dfrac{-\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$.

EXERCICE 2 :

1. Si $f(x) = 3x^2 - 8x + 1$, alors f est dérivable en a réel, et $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{3(a+h)^2-8(a+h)+1-(3a^2-8a+1)}{h}$

$= \dfrac{3(a^2+2ah+h^2)-8h-3a^2}{h} = \dfrac{6ah+3h^2-8h}{h} = 6a + 3h - 8.$

2. Le nombre dérivé de la fonction inverse en $x = 0{,}5$ est $f'(0{,}5) = \dfrac{-1}{0{,}5^2} = \dfrac{-1}{0{,}25} = -4$.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + 3x^2 + 1$. Sa fonction dérivée est $f'(x) = 4x^3 + 6x = 2x(2x^2 + 3)$ s'annule en $x = 0$ et change de signe une fois sur $\mathbb{R}$.

4. Si la fonction f est dérivable et admet un minimum en a, alors $f'(a) = 0$.

5. L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction carrée au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a) = 2a(x-a) + a^2 = 2ax - 2a^2 + a^2 = 2ax - a^2$.

6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0{,}5\}$ par $f(x) = \dfrac{x-2}{2x-1}$, alors $f'(x) = \dfrac{1(2x-1)-2(x-2)}{(2x-1)^2} = \dfrac{3}{(2x-1)^2}$.

EXERCICE 3 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x-1}$.

1. La fonction dérivée de f : f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ dont la dérivée est $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$;

d'où $f'(x) = \dfrac{(2x+1)(x-1)-1(x^2+x-1)}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2-2x+x-1-x^2-x+1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-3x}{(x-1)^2} = \dfrac{x(x-3)}{(x-1)^2}$.

2. Cette dérivée est du signe du numérateur puisque le dénominateur est strictement positif, qui lui-même s'annule en $x = 0$ et $x = 3$. Ce numérateur est du signe de $a = 1 > 0$ sur $]-\infty\ ;\ 0] \cup [3\ ;\ +\infty[$ et est négatif sur $[0\ ;\ 3]$.

D'oû le tableau de variations de la fonction f :

$f(0) = 1$ et $f(3) = \dfrac{3^2+3-1}{3-1} = 5{,}5$.

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	||	−	0	+	
$f(x)$		↗	1	↘	||	↘	5,5	↗	

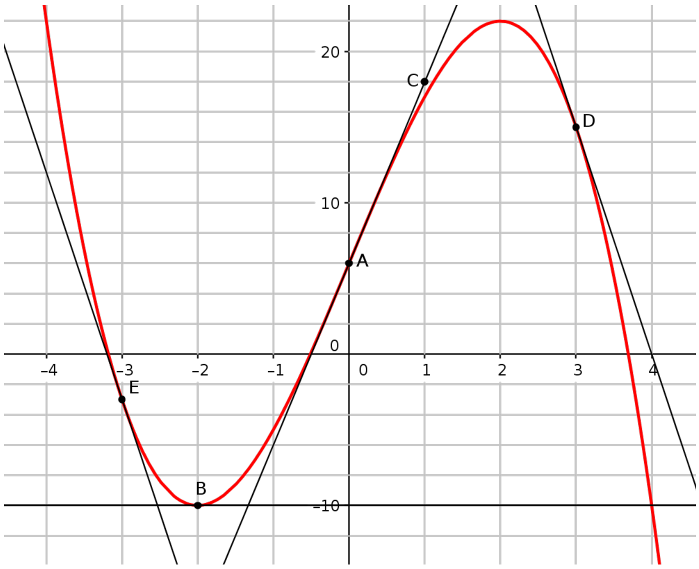
3. La fonction f admet un maximum local égal à 1 atteint en $x = 0$ et un minimum local égal à 5,5 atteint en $x = 3$.

EXERCICE 4 : Sur la courbe ci-contre, les points A(0 ; 6) et B(– 2 ; – 10) sont sur la courbe représentative de la fonction f définie par

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a, b, c et d des réels.

La tangente à la courbe en A passe par C(1 ; 18) ;

la tangente en B est parallèle à l'axe des abscisses.



1. $f(0) = 6$ (ordonnée de A),
$f'(0) = 12$ (coefficient directeur de la tangente à la courbe en A) , $f(-2) = -10$ (ordonnée de B),
$f'(-2) = 0$ (coefficient directeur de la tangente à la courbe en B).

2. Comme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, alors
$f(0) = d = 6$;
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, donc $f'(0) = c = 12$;
$f(-2) = -8a + 4b - 2c + d = -10$,
d'où $-8a + 4b = 8$;
$f'(-2) = 12a - 4b + c = 0$, d'où $12a - 4b = -12$.
On résout le système $\begin{cases} -8a+4b=8 \\ 12a-4b=-12 \end{cases}$;
en ajoutant les deux équations, on trouve $4a = -4$, donc $a = -1$; et $b = (8 + 8a)/4 = 0$.
Ainsi, $f(x) = -x^3 + 12x + 6$.
Et $f'(x) = -3x^2 + 12$.

3. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point D d'abscisse 3 est égal à $f'(3) = -15$.

4. La courbe admet une tangente parallèle à la tangente en D en un point E si ces tangentes ont le même coefficient directeur, soit $f'(x) = -15$ équivaut à $-3x^2 + 12 = -15$ équivaut à $-3x^2 = -27$ équivaut à $x^2 = 9$ équivaut à $x = 3$ ou $x = -3$. Le point D(3 ; 15), donc le point E(– 3 ; – 3).