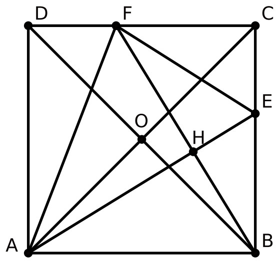
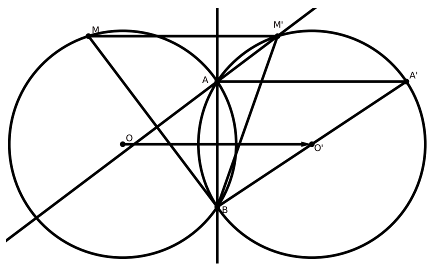
EXERCICE 1 : Soient x et y les dimensions des côtés de l'angle droit du triangle. L'aire du triangle est égale à $\frac{xy}{2} = 5$; d'après le théorème de Pythagore, $x^2 + y^2 = \left(\frac{41}{6}\right)^2$; on obtient $xy = 10$, soit $2xy = 20$; et en faisant la somme membre à membre des deux équations, $x^2 + y^2 + 2xy = \left(\frac{41}{6}\right)^2 + 20$; soit $(x + y)^2 = \frac{1681+36\times20}{36}$, soit $x + y = \sqrt{\frac{2401}{36}}$ ou $-\sqrt{\frac{2401}{36}}$; comme x et y sont des longueurs, $x + y = \sqrt{\frac{2401}{36}} = \frac{49}{6}$.

Ainsi $y = \frac{10}{x}$, d'où l'équation $x + \frac{10}{x} = \frac{49}{6}$; on obtient $x^2 + 10 = \frac{49}{6}x$, soit $x^2 - \frac{49}{6}x + 10 = 0$. On calcule le discriminant : $= \left(\frac{-49}{6}\right)^2 - 4\times10 = \frac{961}{36} = \left(\frac{31}{6}\right)^2 > 0$, donc il y a deux solutions : $x_1 = \frac{\frac{49}{6}+\frac{31}{6}}{2} = \frac{80}{12} = \frac{20}{3}$ et $x_2 = \frac{\frac{49}{6}-\frac{31}{6}}{2} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$. Pour $x_1 = \frac{20}{3}$, alors $y_1 = \frac{10}{\frac{20}{3}} = \frac{3}{2}$ et pour $x_2 = \frac{3}{2}$, alors $y_1 = \frac{10}{\frac{3}{2}} = \frac{20}{3}$. Les dimensions du triangle sont donc $\frac{20}{3}$, $\frac{3}{2}$ et $\frac{41}{6}$.



EXERCICE 2 : Par la rotation de centre O et d'angle 90°, l'image de A est B, celle de B est C, celle de C est D et celle de D est A. Donc l'image du segment [BC] est le segment [CD], et comme BE = CF, l'image de E est F. Ainsi l'image de la droite (AE) est la droite (BF) ; ces droites forment un angle égal à celui de la rotation, soit 90°, donc elles sont perpendiculaires, et (BF) est une hauteur du triangle AEF.
L'image de la droite (DE) est la droite (AF) ; ces droites forment un angle égal à celui de la rotation, soit 90°, donc elles sont perpendiculaires, et (DE) est une hauteur du triangle AEF. Les hauteurs (BF) et (DE) se coupent H, orthocentre du triangle AEF.

EXERCICE 3 : On construit le triangle BDG équilatéral en dehors du point C. On a AB = AD, CD = CB et GB = GD, donc les points A, C et G sont sur médiatrice du segment [BD], donc ils sont alignés.
Par la rotation de centre B et d'angle 60° dans le sens horaire, l'image de G est D, l'image de A est E et l'image de C est F. Les images de trois alignés par une rotation sont trois points alignés, donc les points D, E et F sont alignés.



EXERCICE 4 : L'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$ est le point A', donc $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OO'}$; donc OO'A'A est un parallélogramme et (OO') est parallèle à (AA').
1. Comme OA = OB et O'A = O'B, les points O et O' sont sur la médiatrice de [AB], donc les droites (OO') et (AB) sont perpendiculaires.
Donc (AA') et (AB) sont perpendiculaires, et le triangle AA'B est rectangle en A.
Le point A' est sur le cercle C', image du cercle C par la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$.
Le triangle rectangle AA'B est inscrit dans le cercle C', donc son hypoténuse est un diamètre du cercle ; donc O' est le milieu de [BA']. Ainsi le point B est bien l'image de A' par la symétrie de centre O'.
2. Comme M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$, alors $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AA'}$; donc MM'O'O est un parallélogramme et (MM') est parallèle à (OO'), donc perpendiculaire à (AB). Ainsi la droite (AB) est une hauteur du triangle MM'B.
De plus, MM'A'A est un parallélogramme et (MA) est parallèle à (M'A'),
Le point M' est sur le cercle C', donc le triangle A'BM' est rectangle en M', donc (M'A') est perpendiculaire à (M'B), donc les droites (MA) et (M'B) sont perpendiculaires. Donc la droite (MA) est une hauteur du triangle MM'B. Les deux hauteurs (AB) et (MA) se coupent en A, donc le point A est l'orthocentre du triangle MM'B, pour tout point M du cercle C.