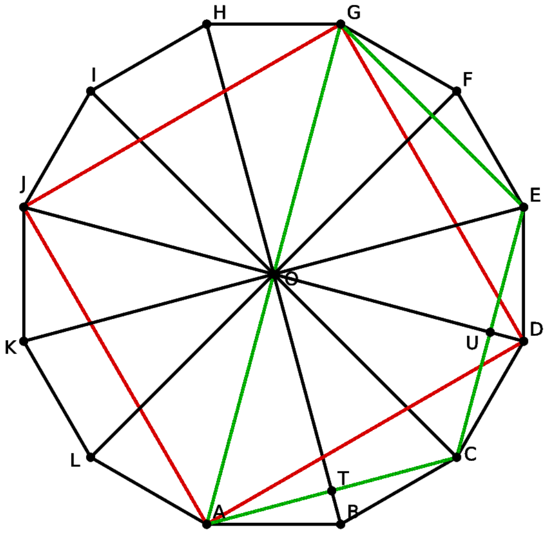
CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 4 PREMIÈRE STD2A



1. Le dodécagone régulier ABCDEFGHIJKL de centre O ci-contre :

2. L'angle $\widehat{AOB} = \frac{360}{12} = 30°$ ainsi que l'angle $\widehat{BOC} = 30°$, donc $\widehat{AOC} = 30 + 30 = 60°$.
De plus, OA = OC = rayon du cercle circonscrit, donc le triangle OAC est équilatéral.

3. Soit T le point d'intersection des droites (AC) et (OB).
a) La droite (OB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOC}$, donc c'est aussi une médiane et une hauteur du triangle AOC. Ainsi T est le milieu de [AC], et AT = $\frac{R}{2}$. Le triangle OAT est rectangle en T, donc d'après le théorème de Pythagore,
$OT^2 = OA^2 - AT^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}$,
donc OT = $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

b) Comme TB = OB – OT , on trouve TB = $R - \frac{R\sqrt{3}}{2} = R\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

c) Le triangle ABT est rectangle en T, donc d'après le théorème de Pythagore,
$AB^2 = TB^2 + AT^2 = R^2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = R^2\left(1-\sqrt{3}+\frac{3}{4}\right) + \frac{R^2}{4} = R^2\left(1-\sqrt{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right) = R^2(2-\sqrt{3})$,
donc AB = $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

4. Le périmètre du dodécagone es égal à $12\times AB = 12\,R\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

5. Soit S le milieu de [AB]. Donc AS = $\frac{AB}{2} = \frac{R\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$
a) Le triangle AOB est isocèle en O, donc la médiane [OS] est aussi une hauteur, donc le triangle ASO est rectangle en S ; donc $OS^2 = OA^2 - AS^2 = R^2 - \frac{R^2(2-\sqrt{3})}{4} = \frac{4R^2-R^2(2-\sqrt{3})}{4} = \frac{2R^2+R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2(2+\sqrt{3})}{4}$,
donc OS = $\frac{R\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

b) L'aire du triangle OAB est égale à $\frac{AB\times OS}{2} = \frac{R\sqrt{2-\sqrt{3}}\times\frac{R\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{2} = \frac{R^2\sqrt{2-\sqrt{3}}\times\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4} = \frac{R^2\sqrt{(2-\sqrt{3})(\sqrt{2+\sqrt{3}})}}{4} = \frac{R^2\sqrt{4-3}}{4} = \frac{R^2}{4}$, et l'aire du dodécagone est égale à $12\times$aire(OAB) = $3R^2$.

6. Soit U le point d'intersection des droites (EC) et (OD). Alors OU est la hauteur du trapèze ACEG et est égal à OT = $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. Les bases du trapèze sont AG = 2R et EC = R. Donc l'aire du trapèze ACEG est égale à
$\frac{OU\times(AG+EC)}{2} = \frac{\frac{R\sqrt{3}}{2}(2R+R)}{2} = \frac{R\sqrt{3}(3R)}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

7. Le triangle AOD est rectangle isocèle en O, avec OA = OD = R. Donc d'après le théorème de Pythagore, $AD^2 = OA^2 + OD^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$, soit AD = $R\sqrt{2}$. L'aire du carré ADGJ est donc égale à $AD^2 = 2R^2$.

8. Le trapèze ABCD est isométrique aux trapèzes DEFG, GHIJ et JKLA. L'aire du dodécagone est formé de l'aire du carré ADGJ et de l'aire de ces trapèzes. Donc l'aire du dodécagone = $4\times$aire(ABCD) + aire(ADGJ), soit
$3R^2 = 4\times$aire(ABCD) + $2R^2$, soit $4\times$aire(ABCD) = R^2 et aire(ABCD) = $\frac{R^2}{4}$.