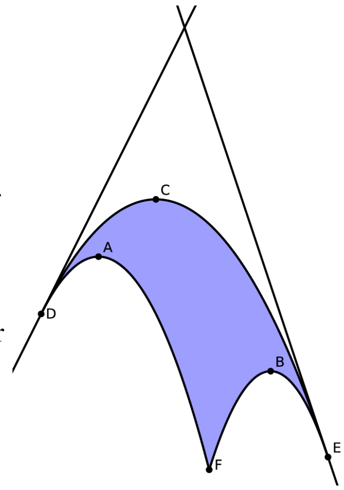
CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 6 PREMIÈRE STD2A

Exercice 1 : On donne ci-contre une représentation graphique composée de trois parties de paraboles de sommets A, B et C.



Les droites tracées sont les tangentes communes à deux de ces paraboles aux points D et E. On sait que A(– 1; 4), B(2 ; 2) et C(0 ; 5). Les tangentes ont un coefficient directeur égal à 2 et – 3.

La parabole de sommet A est la représentation graphique du polynôme P défini par $P(x) = a(x + 1)^2 + 4$ (forme canonique). Cette parabole passe par le point D(– 2; 3), d'où $P(-2) = a(-2 + 1)^2 + 4 = 3$, soit $a + 4 = 3$, soit $a = -1$.

Donc $P(x) = -(x + 1)^2 + 4 = -x^2 - 2x + 3$.

La parabole de sommet C est la représentation graphique du polynôme Q défini par $Q(x) = ax^2 + 5$ (forme canonique). Cette parabole passe par le point D(– 2; 3), d'où $Q(-2) = a(-2)^2 + 5 = 3$, soit $4a + 5 = 3$, soit $a = -\frac{1}{2} = -0{,}5$.

Donc $Q(x) = -0{,}5x^2 + 5$.

Le nombre dérivé de Q en a est $Q'(a) = -0{,}5\times 2a = -a$. Donc $Q'(3) = -3$, donc le point E a pour abscisse 3 et pour ordonnée $Q(3) = -0{,}5\times 3^2 + 5 = -4{,}5 + 5 = 0{,}5$.

La parabole de sommet B est la représentation graphique du polynôme R défini par $R(x) = a(x - 2)^2 + 2$ (forme canonique). Cette parabole passe par le point E(3; 0,5), d'où $R(3) = a(3 - 2)^2 + 2 = 0{,}5$, soit $a + 2 = 0{,}5$, soit $a = -1{,}5$. Donc $R(x) = -1{,}5(x - 2)^2 + 2 = -1{,}5x^2 + 6x - 4$.

L'abscisse du point F intersection des paraboles de sommet A et de sommet B vérifie l'équation : $P(x) = R(x)$, soit $-x^2 - 2x + 3 = -1{,}5x^2 + 6x - 4$; soit $0{,}5x^2 - 8x + 7 = 0$. On calcule le discriminant :

$\Delta = (-8)^2 - 4\times 0{,}5\times 7 = 64 - 14 = 50 > 0$, donc il y a deux solutions :

$x_1 = \frac{8+\sqrt{50}}{2\times 0{,}5} = 8+5\sqrt{2}$ et $x_2 = \frac{8-\sqrt{50}}{2\times 0{,}5} = 8-5\sqrt{2}$.

L'abscisse de F est situé entre les abscisses de A et de B, soit entre – 1 et 2, donc $x_F = 8-5\sqrt{2}$.

L'ordonnée de F est $y_F = -(8-5\sqrt{2} + 1)^2 + 4 = -(9 - 5\sqrt{2})^2 + 4 = -(81 - 90\sqrt{2} + 50) + 4 = 90\sqrt{2} - 127$.

F($8-5\sqrt{2}$; $90\sqrt{2} - 127$).

Exercice 2 : On considère le polynôme P défini sur ℝ par $P(x) = \frac{1}{4}x^3 + x^2 + x + 1$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1. Une tangente est horizontale si le coefficient directeur est nul, donc si le nombre dérivé est nul.

Le nombre dérivé du polynôme P en $x = a$ est $P'(a) = \frac{1}{4}3a^2 + 2a + 1 = \frac{3}{4}a^2 + 2a + 1$. On résout l'équation $P'(a) = 0$, soit $\frac{3}{4}a^2 + 2a + 1 = 0$: On calcule le discriminant : $\Delta = 2^2 - 4\times\frac{3}{4}\times 1 = 4 - 3 = 1 > 0$, donc il y a deux solutions : $x_1 = \frac{-2+\sqrt{1}}{2\times\frac{3}{4}} = \frac{-1}{\frac{3}{2}} = \frac{-2}{3}$ et $x_2 = \frac{-2-\sqrt{1}}{2\times\frac{3}{4}} = \frac{-3}{\frac{3}{2}} = -2$. Ce sont les abscisses des deux points A et B de la courbe C ayant des tangentes horizontales.

2. Soit I le milieu du segment [AB]. L'abscisse du point I est égal à $\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2-\frac{2}{3}}{2} = \frac{\frac{-8}{3}}{2} = \frac{-4}{3}$.

Le nombre dérivé du polynôme P en l'abscisse de I est égal à $P'\left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{-4}{3}\right)^2 + 2\,\frac{-4}{3} + 1 =$

$\frac{3}{4}\times\frac{16}{9} + \frac{-8}{3} + 1 = \frac{4-8+3}{3} = \frac{-1}{3}$.

3. Soit D le point de C d'abscisse 1. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point D est égal à $P'(1) = \frac{3}{4} + 2 + 1 = \frac{15}{4}$. Si les tangentes sont parallèles, alors elles ont le même coefficient directeur, soit $P'(x_E) = \frac{15}{4}$, soit $\frac{3}{4}x_E{}^2 + 2x_E + 1 = \frac{15}{4}$, soit $\frac{3}{4}x_E{}^2 + 2x_E - \frac{11}{4} = 0$.

On calcule le discriminant : $\Delta = 2^2 - 4\times\frac{3}{4}\times\frac{-11}{4} = 4 + \frac{33}{4} = \frac{49}{4} > 0$, donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-2+\sqrt{\frac{49}{4}}}{2\times\frac{3}{4}} = \frac{-2+\frac{7}{2}}{\frac{3}{2}} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{-2-\sqrt{\frac{49}{4}}}{2\times\frac{3}{4}} = \frac{-2-\frac{7}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{11}{3}.$$

L'abscisse du point E de la courbe C est $-\frac{11}{3}$.

4. L'abscisse du milieu de [DE] est égal à $\frac{x_D + x_E}{2} = \frac{1-\frac{11}{3}}{2} = \frac{\frac{-8}{3}}{2} = \frac{-4}{3} = x_I$.

L'ordonnée du milieu de [DE] est égal à $\frac{y_D + y_E}{2} = \frac{P(1)+P(\frac{-11}{3})}{2} = \frac{\frac{13}{4}+(\frac{1}{4}\times\left(\frac{-11}{3}\right)^3+\left(\frac{-11}{3}\right)^2-\frac{11}{3}+1)}{2} =$

$\frac{\frac{13}{4}-\frac{167}{108}}{2} = \frac{23}{27}$; et $y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{P(-2)+P(\frac{-2}{3})}{2} = \frac{1+(\frac{1}{4}\times\left(\frac{-2}{3}\right)^3+\left(\frac{-2}{3}\right)^2-\frac{2}{3}+1)}{2} = \frac{184}{216} = \frac{23}{27}$.

Donc I est aussi le milieu de [DE].

5. Représentation graphique de la courbe C, les points A, B, D, E et I ainsi que les tangentes en ces points :