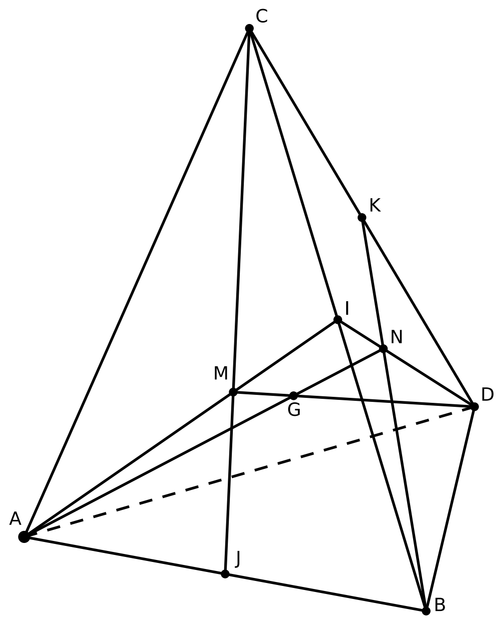
CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 7 PREMIÈRE STD2A

EXERCICE 1



On place le point I milieu de [BC] et J milieu de [AB]. Les médianes (AI) et (CJ) du triangle ABC se coupent en M centre de gravité de ABC.
On place le point K milieu de [CD]. Les médianes (DI) et (BK) du triangle BCD se coupent en N centre de gravité de BCD.

Alors les points A, I, D, M, N sont dans le plan (AID) ; dans ce plan, les droites (AN) et (DM) sont sécantes (elles ne sont pas parallèles, sinon l'une est à l'extérieur du triangle).
Le centre de gravité d'un triangle est situé au deux-tiers de la médiane à partir d'un sommet, donc $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{DN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$

ou $\overrightarrow{IN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$;

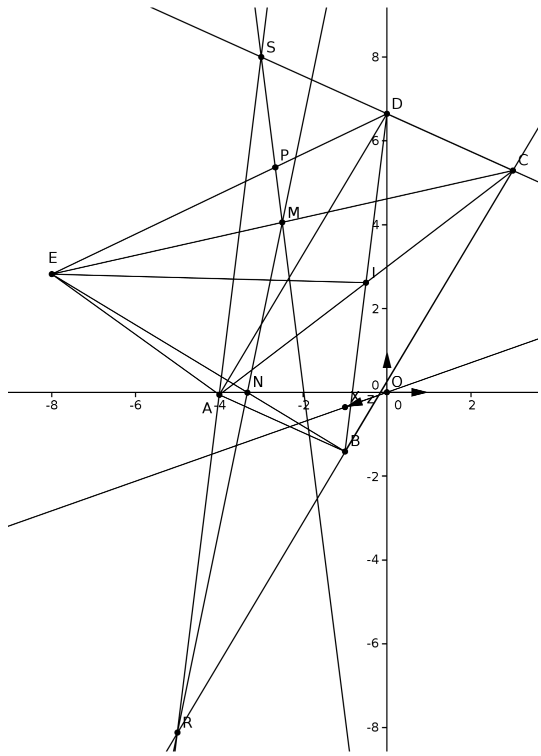
d'où $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{ID} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$.

Par le théorème de Thalès, $\frac{GM}{GD} = \frac{GN}{GA} = \frac{MN}{AD} = \frac{1}{3}$,

d'où $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DG}$.

De plus, comme M est le centre de gravité du triangle ABC,
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.
Ainsi, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{GD} = 3\,\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

EXERCICE 2



1. La figure ;
2. On a $\overrightarrow{AB}\,(1\,;4\,;-1)$ et $\overrightarrow{DC}\,(1\,;4\,;-1)$, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et ABCD est un parallélogramme.
De plus AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ = $\sqrt{(1)^2+(4)^2+(-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$;
AC = $\sqrt{(-1)^2+(6)^2+(5)^2} = \sqrt{62}$;
BC = $\sqrt{(-2)^2+(2)^2+(6)^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$.
On a alors AB² + BC² = AC² , donc le triangle ABC est rectangle en B et ABCD est un rectangle.

3. Le point I centre de ABCD est le milieu des diagonales, donc de [AC], d'où I(2,5 ; 2 ; 3,5).

4. IB = $\sqrt{(x_B - x_I)^2 + (y_B - y_I)^2 + (z_B - z_I)^2}$ = $\sqrt{(1,5)^2+(1)^2+(-3,5)^2} = \sqrt{15,5}$;
IE = $\sqrt{(6,5)^2+(-1)^2+(2,5)^2} = \sqrt{49,5}$;
BE = $\sqrt{(5)^2+(-2)^2+(6)^2} = \sqrt{65}$.
Alors, IB² + IE² = 15,5 + 49,5 = 65 = BE², donc le triangle IBE est rectangle en I.

IA = $\sqrt{(0,5)^2+(-3)^2+(-2,5)^2} = \sqrt{15,5}$; IE = $\sqrt{49,5}$;
AE = $\sqrt{(6)^2+(2)^2+(5)^2} = \sqrt{65}$.
Alors, IA² + IE² = 15,5 + 49,5 = 65 = AE², donc le triangle IAE est rectangle en I.

5. Donc la droite (IE) est perpendiculaire aux droites (IA) et (IB) du plan (ABC), donc (IE) est perpendiculaire au plan (ABC) et [IE] est la hauteur de la pyramide ABCDE de base ABCD.

6. Le volume d'une pyramide est égal à aire(base)×hauteur/3, soit aire(ABCDE) = $\frac{\text{AB}\times\text{AD}\times\text{IE}}{3}$ = $\frac{3\sqrt{2}\times2\sqrt{11}\times\sqrt{49{,}5}}{3}$ = $\sqrt{2}\times2\sqrt{11}\times\sqrt{49{,}5}$ = $2\sqrt{1089}$ = 66.

7. a) M milieu de [CE], donc M(5,5 ; 3 ; 6).

$\overrightarrow{\text{BE}}$ (5 ; – 2 ; 6), d'où $\frac{1}{3}$ $\overrightarrow{\text{BE}}$ ($\frac{5}{3}$; – $\frac{2}{3}$; 2), d'où N($\frac{17}{3}$; $\frac{7}{3}$; 2).

$\overrightarrow{\text{DE}}$ (8 ; 0 ; – 1), d'où $\frac{1}{3}$ $\overrightarrow{\text{DE}}$ ($\frac{8}{3}$; 0 ; – $\frac{1}{3}$), d'où P($\frac{11}{3}$; 1 ; $\frac{20}{3}$).

c) Les points M et N sont dans le plan (ABE), donc la droite (MN) coupe (BC) en R. Dans le triangle CER, M est le milieu de [CE], et N est situé au deux-tiers de [EB], donc N est le centre de gravité du triangle et [EB] est une médiane ; donc B est le milieu de [CR].

Ainsi $x_B = \frac{x_C+x_R}{2}$, $y_B = \frac{y_C+y_R}{2}$, $z_B = \frac{z_C+z_R}{2}$;

d'où $x_R = 2x_B - x_C = 6$; $y_R = 2y_B - y_C = 1$; $z_R = 2z_B - z_C = -6$; R(6 ; 1 ; – 6).

De même, le point D est le milieu de [CS].

Ainsi $x_D = \frac{x_C+x_S}{2}$, $y_D = \frac{y_C+y_S}{2}$, $z_D = \frac{z_C+z_S}{2}$;

d'où $x_S = 2x_D - x_C = 0$; $y_S = 2y_D - y_C = -3$; $z_S = 2z_D - z_C = 8$; S(0 ; – 3 ; 8).

d) Les droites (RS) et (BD) sont parallèles ; en effet les vecteurs $\overrightarrow{\text{RS}}$ et $\overrightarrow{\text{BD}}$ sont colinéaires :
$\overrightarrow{\text{RS}}$ (– 6 ; – 4 ; 14) et $\overrightarrow{\text{BD}}$ (– 3 ; – 2 ; 7) ; on remarque que $\overrightarrow{\text{RS}} = 2\,\overrightarrow{\text{BD}}$.

On a $\overrightarrow{\text{AR}}$ (3 ; 2 ; – 7) et $\overrightarrow{\text{AS}}$ (– 3 ; – 2 ; 7) ; on remarque que $\overrightarrow{\text{AR}} = -\,\overrightarrow{\text{AS}}$, donc les vecteurs sont colinéaires et les points A, R et S sont alignés. On remarque de plus que A est le milieu du segment [RS].