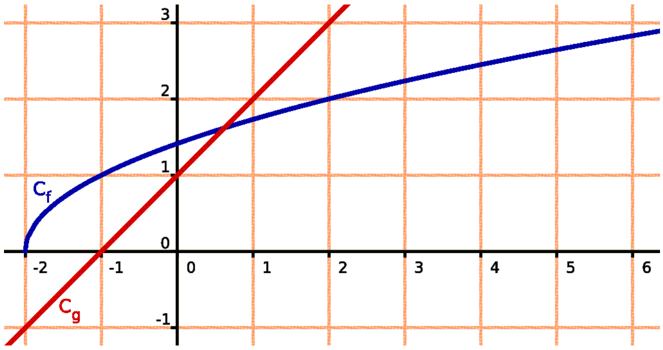
EXERCICE 1 : 1. Dans un repère du plan, le tracé des courbes représentatives des fonctions f et g définies par $f(x) = \sqrt{x+2}$ et $g(x) = x + 1$:



2. L'ensemble de définition de la fonction f est $[-2 ; +\infty[$ et celui de g est $\mathbb{R}$.

3. L'équation $f(x) = g(x)$ équivaut à $\sqrt{x+2} = x + 1$; on élève au carré : $x + 2 = (x + 1)^2$; on développe : $x + 2 = x^2 + 2x + 1$; on réduit : $0 = x^2 + x - 1$; soit $x^2 + x - 1 = 0$; on calcule le discriminant : $\Delta = 1^2 - 4\times1\times(-1) = 5 > 0$, donc il y a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

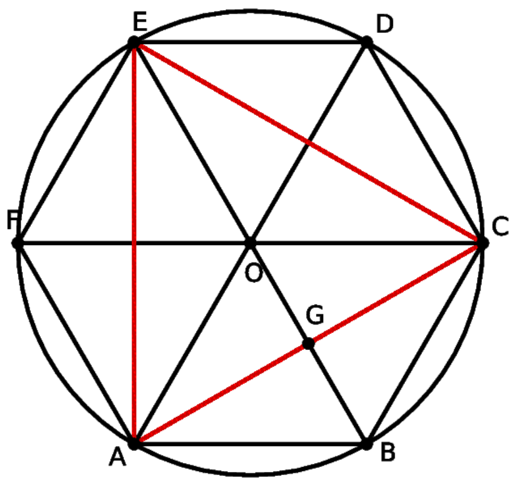
Or $g\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} + 1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ est impossible puisque $\sqrt{x+2}$ est positif.

Donc il n'y a qu'une solution : $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Il y a un seul point d'intersection des deux courbes.

EXERCICE 2 : Pour $x \in [0 ; 1]$, $x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x}$, et pour $x \in [1 ; 2]$, $\sqrt{x} \leqslant x \leqslant x^2$.

EXERCICE 3 : On considère l'hexagone régulier ABCDEF inscrit dans un cercle centre O et de rayon R.

1. La figure avec R = 4 cm.



2. Le quadrilatère ABCO est un losange : on sait que OA = OB = OC et l'angle $\widehat{AOB} = 60°$, donc le triangle ABO est équilatéral, ainsi que le triangle BCO, donc OA = OC = AB = BC.

3. Soit G le point d'intersection des diagonales de ce quadrilatère ABCO. Alors G est le milieu de [OB], donc la longueur OG = 2 cm. AG est une hauteur du triangle OAB, donc $AG = 4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$; la longueur $AC = 2AG = 4\sqrt{3}$.

4. Le triangle ACE est équilatéral car [AC], [CE] et [EA] sont des diagonales de losanges ayant les mêmes longueurs et les mêmes angles.

5. Le périmètre de ACE est égal à $3AC = 12\sqrt{3}$. Dans le triangle ACE, [EG] est une hauteur, puisque les diagonales du losange ABCO sont perpendiculaires. Et EG = EO + OG = 4 + 2 = 6.

L'aire de ce triangle est égale à $\dfrac{AC\times EG}{2} = \dfrac{4\sqrt{3}\times6}{2} = 12\sqrt{3}$.

6. L'aire d u triangle ACE est composée de l'aire des triangles OAC, OCE et OAE qui sont les moitiés d'aires des losanges OABC, OCDE et OEFA. Donc l'aire de l'hexagone ABCDEF est égale au double de l'aire du triangle ACE, donc égale à $24\sqrt{3}$.

EXERCICE 4 : 1. Dans le cercle de centre O ci-dessous, on trace un diamètre [AC], puis la perpendiculaire à (AC) en O ; elle coupe le cercle en B et D ; on obtient le carré ABCD de centre O.

2. Le triangle AOB est rectangle isocèle en O, avec OA = OB = R. Donc d'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = OA^2 + OB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$, soit $AB = R\sqrt{2}$.

3. L'aire du carré est donc égale à $AB^2 = 2R^2$; le périmètre du carré est égal à $4AB = 4R\sqrt{2}$.

4. On construit le carré MNPQ image de ABCD par la rotation de centre O et d'angle 45° dans le sens horaire.

5. Le polygone AMBNCPDQ est un octogone régulier de centre O.

BONUS : Soit T le point d'intersection des droites (OM) et (AB). Le triangle AOB est isocèle en O, donc (OM) est une médiane et une hauteur du triangle AOB. Le triangle AOM est isocèle en O et l'angle $\widehat{AOM}$ = 45°, donc le triangle AOT est rectangle isocèle en T. Ainsi OT² + AT² = OA² , soit 2OT² = OA² = R², soit OT = $\frac{R}{\sqrt{2}}$ = $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Et TM = OM – OT = R – $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ = R $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Le triangle ATM est rectangle en T, donc AM² = AT² + TM² = $\frac{R^2}{2}$ – $R^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ = $\frac{R^2}{2}$ – $R^2\left(1-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)$ = $R^2\left(\frac{1}{2}-1+\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)$ = $R^2\left(\sqrt{2}-1\right)$, d'où AM = R $\sqrt{\sqrt{2}-1}$.