CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ N° 7 PREMIÈRE STD2A

EXERCICE 1 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$.

1. La fonction f est un polynôme du second degré avec $a = 2 > 0$ et l'extremum de la fonction est atteint en $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2\times 2} = -1$. La parabole est tournée vers le haut, d'où le tableau de variations :

2. L'équation $f(x) = 0$: On calcule le discriminant : $\Delta = 4^2 - 4\times 2\times(-1) = 24 > 0$, donc il y a deux solutions :
$x_1 = \frac{-4+\sqrt{24}}{2\times 2} = \frac{-4+2\sqrt{6}}{4} = \frac{-2+\sqrt{6}}{2}$ et $x_2 = \frac{-4-\sqrt{24}}{2\times 2} = \frac{-2-\sqrt{6}}{2}$.

3. Le nombre dérivé de la fonction f en $x = a$ est $f'(a) = 4a + 4$. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point A d'abscisse 1 est $f'(1) = 8$; cette tangente passe par A d'abscisse 1 et d'ordonnée $f(1) = 5$; d'où $5 = 8\times 1 + p$, soit $p = 5 - 8 = -3$. L'équation de la tangente est $y = 8x - 3$.
Le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point B d'abscisse -2 est $f'(-2) = -4$; cette tangente passe par B d'abscisse -2 et d'ordonnée $f(-2) = -1$; d'où $-1 = -4\times(-2) + p$, soit $p = -1 - 8 = -9$.
L'équation de la tangente est $y = -4x - 9$.

4. L'équation de la droite (AB) : le coefficient directeur est égal à $m = \frac{y_A - y_A}{x_A - x_B} = \frac{5-(-1)}{1-(-2)} = \frac{6}{3} = 2$.
La droite passe par A(1 ; 5); d'où $5 = 2\times 1 + p$, soit $p = 5 - 2 = 3$. L'équation de la droite (AB) est $y = 2x + 3$.

5. Si la tangente en E est parallèle à la droite (AB), alors les coefficients directeurs sont égaux ;
soit $f'(x_E) = 4x_E + 4 = 2$, d'où $4x_E = -2$, d'où $x_E = \frac{-1}{2}$. L'ordonnée de E est $f(\frac{-1}{2}) = \frac{-5}{2}$.

EXERCICE 2 : 1. $(10 - x)^2 = 100 - 20x + x^2$.

2. $(10 - x)^3 = (10 - x)^2 (10 - x) = (100 - 20x + x^2)(10 - x) = 1000 - 100x - 200x + 20x^2 + 10x^2 - x^3 =$
$1000 - 300x + 30x^2 - x^3$.

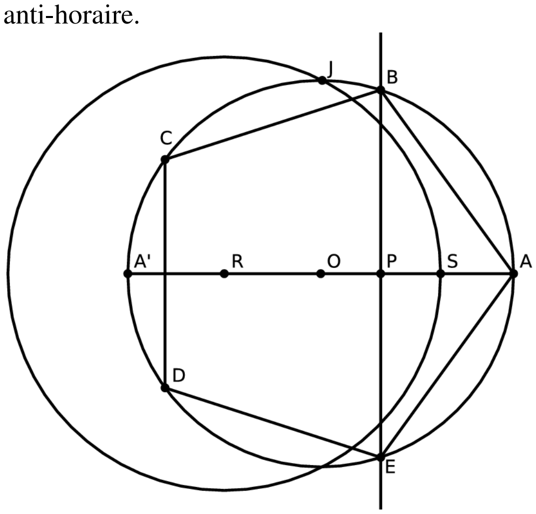
3. a) Soit x l'arête du grand cube ; l'arête du petit cube est alors $10 - x$. Le volume du grand cube est x^3 et celui du petit cube est $(10 - x)^3$. Donc la somme V(x) des volumes des deux cubes est égale à
$x^3 + (10 - x)^3 = x^3 + 1000 - 300x + 30x^2 - x^3 = 30x^2 - 300x + 1000$.

b) La fonction V est un polynôme du second degré avec $a = 2 > 0$ et l'extremum de la fonction est atteint en $x = \frac{-b}{2a} = \frac{300}{2\times 30} = 5$. La parabole est tournée vers le haut, donc le minimum est atteint en $x = 5$ et vaut
$V(5) = 30\times 5^2 - 300\times 5 + 1000 = 250$. Les deux cubes ont alors la même taille.

c) La somme des volumes des deux cubes est égale à 400 cm^3 si $30x^2 - 300x + 1000 = 400$,
soit $30x^2 - 300x + 600 = 0$. On calcule le discriminant : $\Delta = (-300)^2 - 4\times 30\times 600 = 18000 > 0$, donc il y a deux solutions : $x_1 = \frac{300+\sqrt{18000}}{2\times 30} = \frac{300+60\sqrt{5}}{60} = 5 + \sqrt{5}$ et $x_2 = \frac{300-\sqrt{18000}}{2\times 30} = 5 - \sqrt{5}$.
Ces deux solutions sont acceptables puisque $x \in [0 ; 10]$.

EXERCICE 3 : On considère le cercle de centre O et de rayon 1. Le point A est un point du cercle et le point J est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle 90° dans le sens anti-horaire.
Le point A' est le symétrique de A par rapport à O et le point R est le milieu du segment [OA'].
Le cercle de centre R et passant par J coupe le segment [OA] en S. Le point P est le milieu de [OS].
La perpendiculaire à (OA) passant par P coupe le cercle en B et E.

1. La figure :



2. Et la construction du polygone régulier de côté AB et de centre O. Ce polygone est un pentagone régulier.

3. R et le milieu du segment [OA'] rayon du cercle de rayon 1, donc $OR = \frac{1}{2}$; dans le triangle OJR rectangle en O, on

applique le théorème de Pythagore : RJ² = OR² + OJ² = $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{5}{4}$. Donc RJ = $\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

De plus, RS = RJ, puisque S est sur le cercle de centre R et passant par J ; donc RS = $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

4. Comme P est le milieu de [OS], OP = $\frac{1}{2}$ OS = $\frac{1}{2}$ (RS – OR) = $\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

On cherche les solutions de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$:

On calcule le discriminant : $\Delta = 2^2 - 4\times4\times(-1) = 20 > 0$, donc il y a deux solutions : $x_1 = \frac{-2+\sqrt{20}}{2\times4} = \frac{-2+\sqrt{20}}{2\times4} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ = OP et $x_2 = \frac{-2-\sqrt{20}}{2\times4} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. Donc OP est solution de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

5. Dans le triangle OPB rectangle en P, on applique le théorème de Pythagore : OB² = OP² + PB², d'où

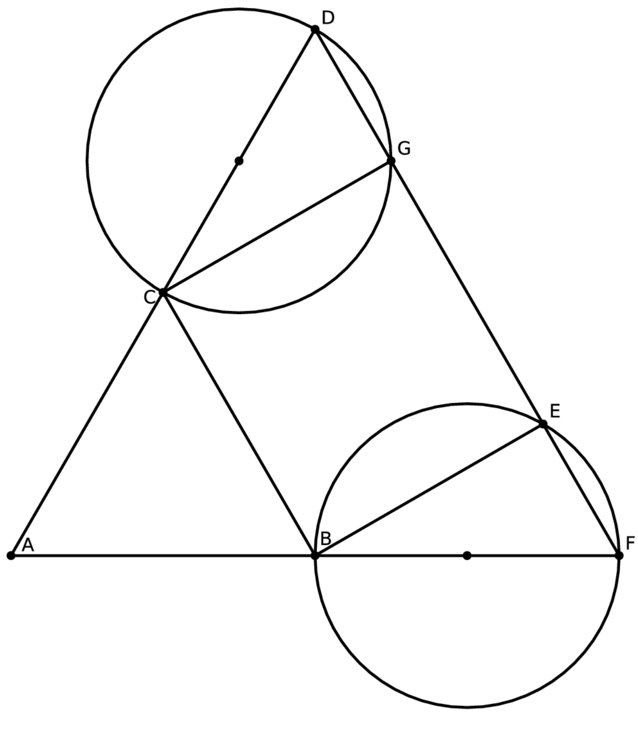
PB² = OB² – OP² = $1 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1-2\sqrt{5}+5}{16} = \frac{16-6+2\sqrt{5}}{16} = \frac{10+2\sqrt{5}}{16}$. Donc PB = $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

Par symétrie EB = 2PB = $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$.

6. Dans le triangle APB rectangle en P, on applique le théorème de Pythagore :

AB² = AP² + PB² = $(OA - OP)^2 + \frac{10+2\sqrt{5}}{16} = \left(1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 + \frac{10+2\sqrt{5}}{16} = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{4}\right)^2 + \frac{10+2\sqrt{5}}{16} =$

$\frac{25+10\sqrt{5}+5+10+2\sqrt{5}}{16} = \frac{40+12\sqrt{5}}{16} = \frac{10+3\sqrt{5}}{4}$. Donc AB = $\frac{\sqrt{10+3\sqrt{5}}}{2}$.



EXERCICE 4 : La construction :

4. Une transformation du plan telle que le triangle BEF a pour image le triangle CDG est la symétrie axiale d'axe la médiatrice de [BC].

5. Le quadrilatère BEGC est un rectangle.

En effet :

Les points C et D sont les milieux de deux côtés du triangle ADF, donc la droite (BC) est parallèle à la droite (DF), donc à (EG).

Le triangle BEF est inscrit dans un cercle dont un côté est un diamètre, il est donc rectangle en E; donc (BE) est perpendiculaire à (EF) donc à (EG).

Le triangle CDG est inscrit dans un cercle dont un côté est un diamètre, il est donc rectangle en G; donc (CG) est perpendiculaire à (DG) donc à (EG).

Les droites (CG) et (BE) sont perpendiculaires à une même droite, elles sont parallèles.

Donc BEGC est un parallélogramme avec deux angles droites, c'est donc un rectangle.

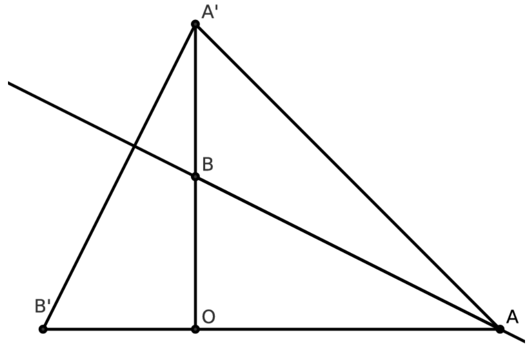
6. ABC est équilatéral, donc ADF est aussi équilatéral (AF = AD et l'angle $\widehat{DAF}$ = 60°). Donc le triangle IEF est aussi équilatéral (IE = IF et l'angle $\widehat{IFE}$ = 60°). Donc EF = IF = $\frac{1}{2}$ BF = $\frac{1}{2}$ AB = 2. on applique le théorème de Pythagore :

OB² = OP² + PB², d'où EB² = BF² – EF² =
$4^2 - 2^2 = 12$, donc EB = $2\sqrt{3}$.

Dans le triangle BCE rectangle en B, on applique le théorème de Pythagore :

CE² = EB² + BC² = 12 + 4^2 = 28, d'où EC = $2\sqrt{7}$.

EXERCICE 5 : On considère le triangle OAB rectangle en O ci-dessous.
On note r la rotation de centre O et d'angle 90° dans le sens anti-horaire.
1. La construction ci-dessous des images A' et B' des points A et B par r.



2. Comme r(A) = A' et r(B) = B' et la rotation conserve les longueurs, alors AB = A'B'. L'image de la droite (AB) est la droite (A'B'), et l'angle formé par une droite et son image est l'angle de la rotation, donc les droites (AB) et (A'B') sont perpendiculaires.
3. On sait que (OA') est perpendiculaire à (OA), donc les points O, B, A' sont alignés. De plus (OB') est perpendiculaire à (OB) donc les points O, A, B' sont alignés. Ainsi (OB) est une hauteur du triangle AA'B'. On a vu que (AB) est perpendiculaire à (A'B') donc (AB) est une hauteur du triangle AA'B'. Ces deux hauteurs se coupent en B, donc l'orthocentre du triangle AA'B' est le point B.

EXERCICE 6 : 1. Construction du patron et de la perspective cavalière (0,5 ; 30°) d'une pyramide ABCDE de base rectangulaire ABCD tel que AB = 4 cm, BC = 6 cm et la hauteur EH de la pyramide est telle que H est le centre du rectangle ABCD et EH = 5 cm.
2. Construction de la section de la pyramide par le plan (MNP) défini par les points M, N et P milieux respectifs des arêtes [AB], [AD] et [CE] : la droite (MN) coupe la droite (BC) en I et la droite (DC) en G (ces droites sont coplanaires dans le plan (ABC)). Les droites (PG) et (DE) se coupent en K (dans le plan (CDE)) ; les droites (PI) et (BE) se coupent en J (dans le plan (BCE)). La section est le pentagone MNKPJ.