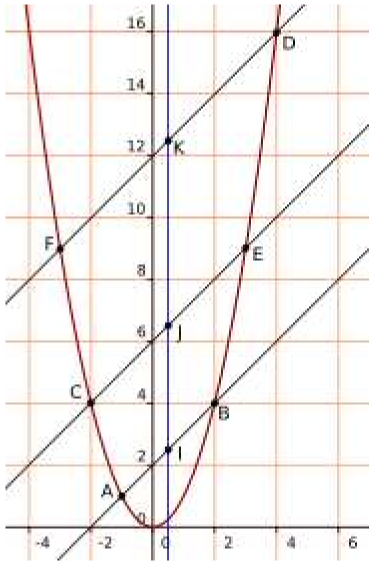
Exercice 1 : On considère la parabole d'équation $y = x^2$ dans le repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$) du plan, les points A, B, C, D de la parabole d'abscisses respectives – 1, 2, – 2, 4.

Construire les points E, F de la parabole tels que les droites (AB), (CE) et (DF) soient parallèles.



Coordonnées des points A(– 1 ; 1), B(2 ; 4), C(– 2 ; 4) et D(4 ; 16) puisque les points sont sur la parabole.

La droite (AB) a pour équation $y = mx + p$ avec $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{4-1}{2-(-1)} = 1$ et $p = y_A - mx_A = 1 - 1(-1) = 2$; d'où (AB) : $y = x + 2$.

La droite (CE) est parallèle à la droite (AB), donc elles ont le même coefficient directeur : $m = 1$ et $p = y_C - mx_C = 4 - 1(-2) = 6$; d'où (CE) : $y = x + 6$.

Le point E est le point d'intersection de la parabole et de la droite (CE), donc son abscisse vérifie l'équation $x^2 = x + 6$, soit $x^2 - x - 6 = 0$;

le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times1\times(-6) = 25 > 0$; donc l'équation a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1-5}{2} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+5}{2} = 3$.

D'après le graphique, E(3 ; 9).

La droite (DF) est parallèle à la droite (AB), donc elles ont le même coefficient directeur : $m = 1$ et $p = y_D - mx_D = 16 - 1\times4 = 12$; d'où (CE) : $y = x + 12$.

Le point F est le point d'intersection de la parabole et de la droite (DF), donc son abscisse vérifie l'équation $x^2 = x + 12$, soit $x^2 - x - 12 = 0$; le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times1\times(-12) = 49 > 0$; donc l'équation a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1-7}{2} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+7}{2} = 4$. D'après le graphique, F(– 3 ; 9).

Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments [AB], [CE] et [DF] ;

donc $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-1+2}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{1+4}{2} = \dfrac{5}{2}$; donc I($\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{5}{2}$).

$x_J = \dfrac{x_C + x_E}{2} = \dfrac{-2+3}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $y_J = \dfrac{y_C + y_E}{2} = \dfrac{4+9}{2} = \dfrac{13}{2}$; donc J($\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{13}{2}$).

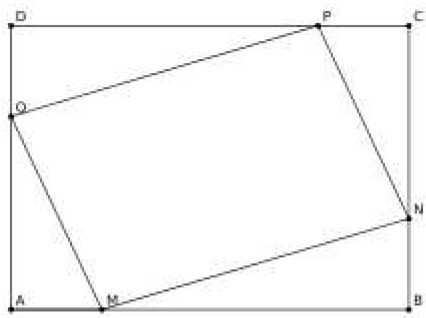
$x_K = \dfrac{x_D + x_F}{2} = \dfrac{4-3}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $y_K = \dfrac{y_D + y_F}{2} = \dfrac{16+9}{2} = \dfrac{25}{2}$; donc K($\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{25}{2}$).

Les points I, J et K ont la même abscisse, donc ils sont alignés sur une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Cette situation se généralise : Soient A, B, C et D quatre points de la parabole d'équation $y = x^2$ tels qu'on puisse construire les points E, F de la parabole et les droites (AB), (CE) et (DF) soient parallèles. Les points I, J et K milieux respectifs des segments [AB], [CE] et [DF] sont alignés sur la droite d'équation $x = \dfrac{x_A + x_B}{2}$.

Exercice 2 : On considère le rectangle ABCD tel que AB = 7 et AD = 5 cm. Le point M est sur le segment [AB] tel que AM = x, le point N est sur le segment [BC] tel que BN = x,

le point P est sur le segment [CD] tel que CP = x, et le point Q est sur le segment [DA] tel que DQ = x.



1. On a AM = x donc BM = 7 – x = CN = DP = AQ.

Premier cas : $x \leqslant 5$: le point N est sur le segment [BC] et Q est sur [AD].

L'aire du quadrilatère MNPQ est égale à l'aire de ABCD auquel on soustrait l'aire des triangles rectangles BMN, CNP, DPQ et AMQ.

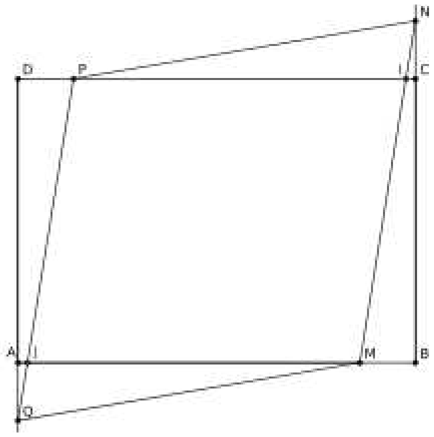
On a aire(BMN) = aire(DPQ) = $\dfrac{BM\times BN}{2} = \dfrac{(7-x)\times x}{2}$ et

aire(CNP) = aire(AMQ) = $\dfrac{CN\times CP}{2} = \dfrac{(5-x)\times x}{2}$.

D'où aire(MNPQ) = $7\times5 - (7-x)x - (5-x)x = 35 - 7x + x^2 - 5x + x^2 = 2x^2 - 12x + 35$. Cette fonction est un polynôme du second degré ; la parabole est tournée vers le haut car $a = 2 > 0$; le minimum de cette fonction est atteint en $x = \frac{-b}{2a} = 3$ et vaut $2\times3^2 - 12\times3 + 35 = 17$.

Comme AM = x et que M est un point du segment [AB], x est compris entre 0 et 7.

Deuxième cas : $5 < x \leqslant 7$. Soit I le point d'intersection de [MN] et [CD] et J le point d'intersection de [PQ] et [AB]. Dans le triangle MBN, les droites (IC) et (MB) sont parallèles, donc d'après le théorème de Thalès, $\frac{\text{IC}}{\text{BM}} = \frac{\text{NC}}{\text{NB}}$, soit $\frac{\text{IC}}{7-x} = \frac{x-5}{x}$; d'où IC = $\frac{(7-x)(x-5)}{x}$.



Ainsi IP = $\left(x - \frac{(7-x)(x-5)}{x}\right) = \frac{2x^2-12x+35}{x}$.

L'aire de MIPJ = BC×PI = $\frac{5(2x^2-12x-35)}{x}$.

L'aire(INP) = aire(JMQ) = $\frac{\text{IP}\times\text{CN}}{2} = \frac{(2x^2-12x+35)(x-5)}{2x}$.

L'aire de MNPQ est l'aire du parallélogramme MIPJ plus l'aire du triangle INP et l'aire du triangle JMQ,

soit aire(MNPQ) = aire(MIPJ) + aire(INP) + aire(JMQ) =

$\frac{5(2x^2-12x-35)}{x} + \frac{(2x^2-12x+35)(x-5)}{x} =$

$\frac{(2x^2-12x+35)(5+x-5)}{x} = \frac{(2x^2-12x+35)x}{x} = 2x^2 - 12x + 35$ qui est la même expression que dans le premier cas.

L'aire est minimale lorsque $x = 3$ et vaut 17. Si $x = 0$, l'aire est égale à 35 ; si $x = 7$, l'aire est égale à $2\times7^2 - 12\times7 + 35 = 49$. Donc l'aire est maximale lorsque $x = 7$ et vaut 49.

2. L'aire de MNPQ est égale à la moitié de celle de ABCD lorsque $2x^2 - 12x + 35 = 35/2 = 17{,}5$, soit $2x^2 - 12x + 17{,}5 = 0$; le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4\times2\times17{,}5 = 4 > 0$; donc l'équation a deux solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12-2}{2\times2} = 2{,}5$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12+2}{2\times2} = 3{,}5$.

Donc l'aire de MNPQ est égale à la moitié de celle de ABCD lorsque $x = 2{,}5$ ou $x = 3{,}5$.

3. L'aire de MNPQ est supérieure ou égale à 30 cm² si $2x^2 - 12x + 35 \geqslant 30$, soit $2x^2 - 12x + 5 \geqslant 0$; le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4\times2\times5 = 104 > 0$; donc l'équation a deux solutions :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12-2\sqrt{26}}{2\times2} = \frac{6-\sqrt{26}}{2} \simeq 0{,}45$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12+2\sqrt{26}}{2\times2} = \frac{6+\sqrt{26}}{2} \simeq 5{,}54$.

Tableau de signes :

x	0		$\frac{6-\sqrt{26}}{2}$		$\frac{6+\sqrt{26}}{2}$		7
$2x^2 - 12x + 5$		+	0	−	0	+	

L'aire de MNPQ est supérieure ou égale à 30 cm² si $x \in \left[0 ; \frac{6-\sqrt{26}}{2}\right] \cup \left[\frac{6+\sqrt{26}}{2} ; 7\right]$.