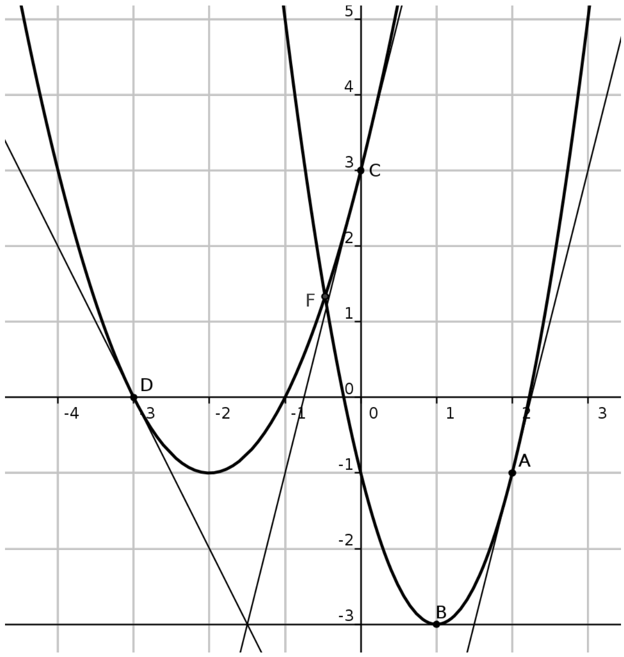
CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 6 PREMIÈRE STD2A



Exercice 1 : On donne ci-contre une représentation graphique composée de deux paraboles, l'une passant par A et B, l'autre passant par C et D. Les droites tracées sont les tangentes à ces paraboles aux points A, B, C et D.
On sait que A(2 ; – 1), B(1 ; – 3), C(0 ; 3) et D(– 3 ; 0).
Les tangentes en A et C sont parallèles de coefficient directeur égal à 4 ; la tangente en B est horizontale et celle en D a un coefficient directeur égal à – 2.
Soient P_1 et P_2 les deux polynômes dont les paraboles sont les représentations graphiques. P_1 celui dont la parabole passe par A et B, P_2 est l'autre polynôme.
On pose $P_1(x) = ax^2 + bx + c$. Alors $P_1'(x) = 2ax + b$.
On a $P_1(2) = -1$ et $P_1(1) = -3$.
B est le sommet de la parabole, donc $P_1'(1) = 0$, soit $2a + b = 0$.
La tangente en A a un coefficient directeur de 4, donc $P_1'(2) = 4$, soit $4a + b = 4$.
On résout le système $\begin{cases} 2a+b=0 \\ 4a+b=4 \end{cases}$; on soustrait les deux équations, on obtient $2a = 4$, soit $a = 2$; et $b = -4$.
Comme $P_1(2) = -1$, soit $4a + 2b + c = -1$, soit $8 - 8 + c = -1$, soit $c = -1$. Donc $\boxed{P_1(x) = 2x^2 - 4x - 1}$.

On pose $P_2(x) = ax^2 + bx + c$. Alors $P_2'(x) = 2ax + b$.
On a $P_2(0) = 3$ et $P_2(-3) = 0$, d'où $c = 3$ et $9a - 3b + c = 0$, soit $9a - 3b + 3 = 0$.
La tangente en C a un coefficient directeur de 4, donc $P_2'(0) = 4$, soit $b = 4$.
La tangente en D a un coefficient directeur de – 2, donc $P_2'(-3) = -2$, soit $-6a + b = -2$, soit $-6a + 4 = -2$, soit $-6a = -6$, soit $a = 1$. Donc $\boxed{P_2(x) = x^2 + 4x + 3}$.

Pour déterminer les coordonnées du point F intersection de deux paraboles, on résout l'équation $P_1(x) = P_2(x)$, soit $2x^2 - 4x - 1 = x^2 + 4x + 3$ équivaut à $x^2 - 8x - 4 = 0$.
Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4\times1\times(-4) = 80 > 0$; donc l'équation a deux solutions :
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8-\sqrt{80}}{2} = 4 - 2\sqrt{5} \simeq -0{,}47$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8+\sqrt{80}}{2} = 4 + 2\sqrt{5} \simeq 8{,}47$.
Les ordonnées : $y_1 = P_2(4 - 2\sqrt{5}) = (4 - 2\sqrt{5})^2 + 4(4 - 2\sqrt{5}) + 3 = 55 - 24\sqrt{5}$;
et $y_2 = P_2(3 + \sqrt{17}) = (4 + 2\sqrt{5})^2 + 4(4 + 2\sqrt{5}) + 3 = 55 + 24\sqrt{5}$. Le point F a une abscisse comprise entre celle de D et celle de C, donc négative. Ainsi $F(4 - 2\sqrt{5} ; 55 - 24\sqrt{5})$.

Exercice 2 : On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 120x + 100$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
1. Pour montrer qu'il existe deux points A et B de la courbe C ayant des tangentes horizontales, on cherche des réels a et b tels que $P'(a) = P'(b) = 0$.
On a $P'(a) = 6a^2 - 6a - 120 = 6(a^2 - a - 20)$. Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times1\times(-20) = 81 > 0$; donc l'équation a deux solutions : $a = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-9}{2} = -4$ et $b = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+9}{2} = 5$.
Les ordonnées de ces points : $P(a) = 2\times(-4)^3 - 3\times(-4)^2 - 120\times(-4) + 100 = 404$ et $P(b) = 2\times5^3 - 3\times5^2 - 120\times5 + 100 = -325$. D'où A(– 4 ; 404) et B(5 ; – 325).

2. Soit I le milieu du segment [AB]. Les coordonnées de I sont $\frac{x_A+x_B}{2} = 0{,}5$ et $\frac{y_A+y_B}{2} = 39{,}5$.
Le nombre dérivé du polynôme P en l'abscisse de I est $P'(0{,}5) = 6\times0{,}5^2 - 6\times0{,}5 - 120 = -121{,}5$.

3. Soit D le point de C d'abscisse 7. Le coefficient directeur de la tangente 0 C en D est $P'(7) = 6\times7^2 - 6\times7 - 120 = 132$.

Un point E de la courbe C ayant une tangente parallèle à la tangente à C en D a une abscisse vérifiant
P'(a) = $6a^2 - 6a - 120 = 132$, soit $6a^2 - 6a - 252 = 0$, soit $6(a^2 - a - 42) = 0$.

Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times1\times(-42) = 169 > 0$; donc l'équation a deux solutions : $a_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $= \dfrac{1-13}{2} = -6$ et $a_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+13}{2} = 7$. On retrouve la solution 7 correspondant à l'abscisse de D et la solution – 6 qui est l'abscisse de E. L'ordonnée de E est $P(-6) = 2\times(-6)^3 - 3\times(-6)^2 - 120\times(-6) + 100 = 280$.

4. Pour montrer que I est aussi le milieu de [DE], on détermine les coordonnées du milieu de [DE] :
L'ordonnée de D est $P(7) = 2\times7^3 - 3\times7^2 - 120\times7 + 100 = -201$.

$\dfrac{x_D+x_E}{2} = \dfrac{7-6}{2} = 0{,}5$ et $\dfrac{y_D+y_E}{2} = \dfrac{-201+280}{2} = 39{,}5$. Ainsi I est bien le milieu de [DE].