CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ N° 1 PREMIÈRE STD2A

EXERCICE 1 : On considère les polynômes P et Q définis par $P(x) = -x^2 - 2x + 4$ et $Q(x) = x^2 - 6x + 5$.

1. Les coordonnées du sommet de la parabole représentative de P : son abscisse est égale à $\frac{-b}{2a} = \frac{2}{2\times(-1)} = -1$ et son ordonnée est $P(-1) = -(-1)^2 - 2\times(-1) + 4 = 5$. Donc le sommet est S(– 1 ; 5).

2. Le tableau de variations de $P(x)$ : comme $a = -1 < 0$, la parabole est tournée vers le bas, d'où :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Le tableau de variations de $Q(x)$ : comme $a = 1 > 0$, la parabole est tournée vers le haut, l'abscisse du sommet est $\frac{-b}{2a} = 3$ et l'ordonnée $Q(3) = -4$ ; d'où :

| $x$ | $-\infty$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $Q(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-4$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

3. Résolution des équations $P(x) = 0$ et $Q(x) = 0$ :

$P(x) = -x^2 - 2x + 4 = 0$ : on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\times(-1)\times(4) = 20 > 0$, donc l'équation a deux solutions : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+\sqrt{20}}{2\times(-1)} = \frac{2+2\sqrt{5}}{-2} = -1-\sqrt{5}$

et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-\sqrt{20}}{2\times(-1)} = \frac{2-2\sqrt{5}}{-2} = -1+\sqrt{5}$. Donc S = { $-1-\sqrt{5}$ ; $-1+\sqrt{5}$ }.

$Q(x) = x^2 - 6x + 5 = 0$ : on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4\times1\times5 = 16 > 0$, donc l'équation a deux solutions : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6+\sqrt{16}}{2} = 5$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6-\sqrt{16}}{2} = 1$. Donc S = {1 ; 5}.

4. Les tableaux de signes de $P(x)$ et de $Q(x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1-\sqrt{5}$ | | $-1+\sqrt{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

5. Pour déterminer les coordonnées des points d'intersection des paraboles représentant P et Q, on résout l'équation $P(x) = Q(x)$, soit $-x^2 - 2x + 4 = x^2 - 6x + 5$, soit $-2x^2 + 4x - 1 = 0$ ; on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4\times(-2)\times(-1) = 8 > 0$, donc l'équation a deux solutions :

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+\sqrt{8}}{2\times(-2)} = \frac{-4+2\sqrt{2}}{-4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{8}}{2\times(-2)} = \frac{-4-2\sqrt{2}}{-4} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc S = {$1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ }.

6. L'inéquation $Q(x) \geqslant 18$ équivaut à $x^2 - 6x + 5 \geqslant 18$ équivaut à $x^2 - 6x - 13 \geqslant 0$ ; on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4\times1\times(-13) = 88$, donc l'équation a deux solutions :

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6+\sqrt{88}}{2} = \frac{6+2\sqrt{22}}{2} = 3 + \sqrt{22}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6-\sqrt{88}}{2} = 3 - \sqrt{22}$.

On utilise un tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $3-\sqrt{22}$ | | $3+\sqrt{22}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 + 2x - 8$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

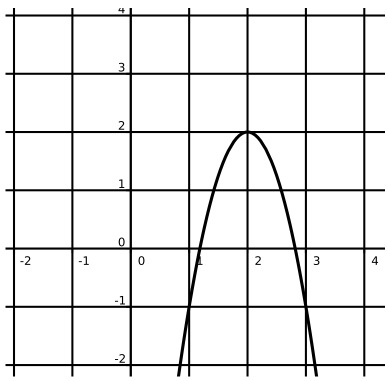
Ainsi, la solution est S = $]-\infty ; 3 - \sqrt{22}] \cup [3 + \sqrt{22} ; +\infty[$.

EXERCICE 2 : Trouver deux nombres dont la somme vaut 10 et le produit 23.
Soient $x$ et $y$ les deux nombres ; on a alors $x + y = 10$ et $xy = 23$ ; d'où $y = 10 - x$ et en remplaçant dans la deuxième équation, on trouve $x(10 - x) = 23$, soit $-x^2 + 10x - 23 = 0$ ;
on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4\times(-1)\times(-23) = 8 > 0$, donc l'équation a deux solutions :
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10+\sqrt{8}}{2\times(-1)} = = \frac{-10+2\sqrt{2}}{-2} = 5-\sqrt{2}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10-\sqrt{8}}{2\times(-1)} = 5+\sqrt{2}$ .
Les deux nombres cherchés sont $5-\sqrt{2}$ et $5+\sqrt{2}$ . Vérification : $5-\sqrt{2} + 5+\sqrt{2} = 10$ et
$(5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2}) = 25 - 2 = 23$.

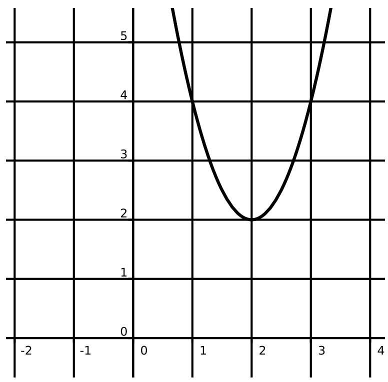
EXERCICE 3 : On considère les polynômes $P_1$ , $P_2$ , $P_3$ définis sur $\mathbb{R}$ par :
$P_1(x) = x^2 - 4x + 6$ ; $P_2(x) = -3x^2 + 12x - 10$ et $P_3(x) = 2x^2 - 8x + 10$.

1. Les courbes A, B et C ci-dessous sont les représentations graphiques de ces trois polynômes.
$P_1$ : C car tournée vers le haut et $P_1(1) = 1 - 4 + 6 = 3$ ;
$P_2$ : A car tournée vers le bas ;
$P_3$ : B car tournée vers le haut et $P_3(1) = 2 - 8 + 10 = 4$.

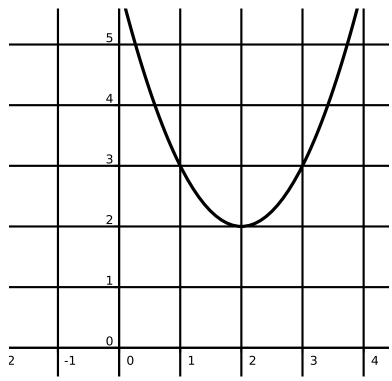
**A**



**B**



**C**



2. Par lecture graphique, indiquer le signe de $a$ et le signe du discriminant (positif, négatif ou nul).

A : signe de $a$ : négatif car parabole tournée vers le bas ; signe du discriminant : positif car la parabole coupe l'axe des abscisses en deux points.

B : signe de $a$ : positif car parabole tournée vers le haut; signe du discriminant : négatif car la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.

C : signe de $a$ : positif car parabole tournée vers le haut; signe du discriminant : négatif car la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.