CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ N° 6 PREMIÈRE STD2A

EXERCICE 1 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 5x - 6$.

1. On détermine les coordonnées du sommet de la parabole représentative de la fonction f :

$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{2} = -2{,}5$ et $\beta = f\left(\frac{-5}{2}\right) = \left(\frac{-5}{2}\right)^2 + 5\times\frac{-5}{2} - 6 = \frac{-49}{4}$. De plus $a = 1 > 0$, donc la parabole est tournée vers le haut. Le tableau de variations de la fonction f :

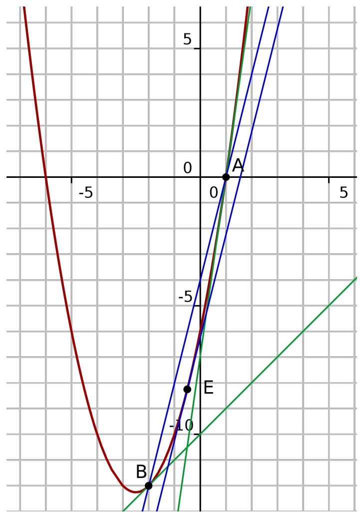
x	$-\infty$		$-2{,}5$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{-49}{4}$	↗	$+\infty$

2. Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 0$: On calcule le discriminant : $\Delta = 5^2 - 4\times1\times(-6) = 49 > 0$, donc il y a deux solutions : $x_1 = \frac{-5+7}{2\times1} = 1$ et $x_2 = \frac{-5-7}{2\times1} = -6$. Donc $S = \{1 ; -6\}$.

3. Pour déterminer l'équation de la tangente à la courbe C représentative de la fonction f au point A d'abscisse 1 et l'équation de la tangente à la courbe C au point B d'abscisse -2, il faut déterminer les nombres dérivés de la fonction f en $x = 1$ et en $x = -2$:

En $x = 1$: $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2+5(1+h)-6-(1^2+5\times1-6)}{h} = \frac{h^2+7h}{h} = h + 7$, donc $f'(1) = 7$. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point A d'abscisse 1 est $f'(1) = 7$; cette tangente passe par A d'abscisse 1 et d'ordonnée $f(1) = 0$; d'où $0 = 7\times1 + p$, soit $p = -7$. L'équation de la tangente est $y = 7x - 7$.

En $x = 1$: $\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \frac{(-2+h)^2+5(-2+h)-6-((-2)^2+5\times(-2)-6)}{h} = \frac{h^2+h}{h} = h + 1$, donc $f'(-2) = 1$. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point B d'abscisse -2 est $f'(-2) = 1$; cette tangente passe par B d'abscisse -2 et d'ordonnée $f(-2) = -12$; d'où $-12 = 1\times(-2) + p$, soit $p = -10$. L'équation de la tangente est $y = x - 10$.



4. L'équation de la droite (AB) : le coefficient directeur est égal à

$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{0-(-12)}{1-(-2)} = \frac{12}{3} = 4$.

La droite passe par A(1 ; 0); d'où $0 = 4\times1 + p$, soit $p = -4$.

L'équation de la droite (AB) est $y = 4x - 4$.

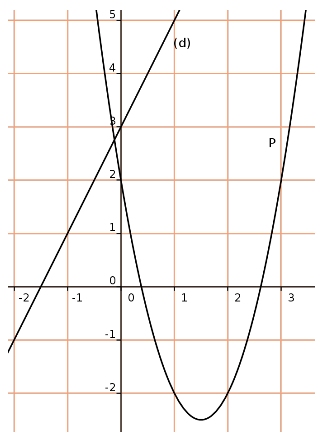
5. Si la tangente en E est parallèle à la droite (AB), alors les coefficients directeurs sont égaux ; soit $f'(x_E) = 4$. On détermine $f'(x_E)$:

$\frac{f(x_E+h)-f(x_E)}{h} = \frac{(x_E+h)^2+5(x_E+h)-6-((x_E)^2+5x_E-6)}{h} = \frac{h^2+(2x_E+5)h}{h} =$ $h + 2x_E + 5$;

donc $f'(x_E) = 2x_E + 5$, d'où $2x_E + 5 = 4$, d'où $2x_E = -1$, et $x_E = \frac{-1}{2}$.

L'ordonnée de E est $f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-33}{4}$.

EXERCICE 2 : Sur le graphique ci-contre, sont représentés la parabole P et la droite (d).



1. On a $f(0) = 2$, donc si $f(x) = ax^2 + bx + c$, alors $c = 2$.

On a $f(1) = -2$, donc $a + b + 2 = -2$, soit $a + b = -4$;

On a $f(2) = -2$, donc $4a + 2b + 2 = -2$, soit $4a + 2b = -4$;

on résout le système $\begin{cases} a+b=-4 \\ 4a+2b=-4 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} b=-4-a \\ 4a+2(-4-a)=-4 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} b=-4-a \\ 2a-8=-4 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} b=-4-a \\ a=2 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} b=-6 \\ a=2 \end{cases}$

Donc la parabole est bien la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 6x + 2$.

2. On prend deux points sur la droite : A(0 ; 3) et B(1 ; 5). Le coefficient directeur de la droite est $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3-5}{0-1} = 2$. La droite passe par A d'où $3 = 2\times0 + p$, soit $p = 3$. Donc la droite a bien pour équation $y = 2x + 3$.

3. Les abscisses des points d'intersection de P et (d) vérifient l'équation

$2x^2 - 6x + 2 = 2x + 3$ équivaut à $2x^2 - 8x - 1 = 0$. On calcule le discriminant : $\Delta = (-8)^2 - 4\times2\times(-1) = 72 > 0$, donc il y a deux solutions : $x_1 = \frac{8+\sqrt{72}}{2\times2} = \frac{8+6\sqrt{2}}{4} = 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \frac{8-\sqrt{72}}{2\times2} = \frac{8-6\sqrt{2}}{4} = 2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

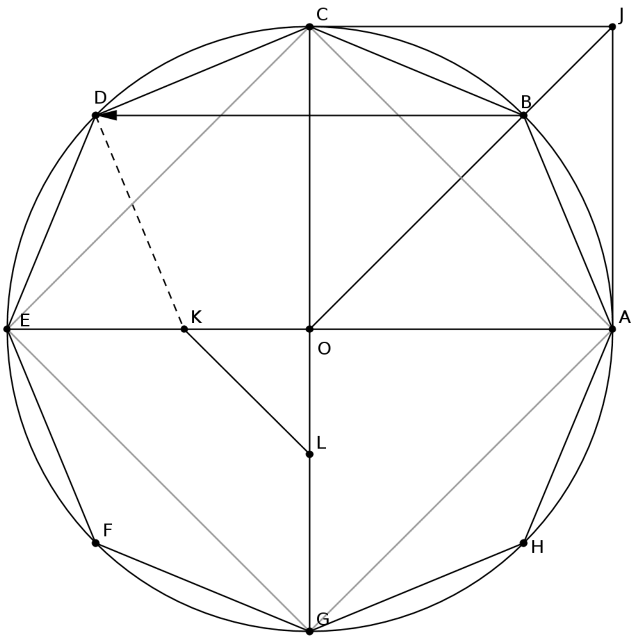
Les ordonnées : $2x_1 + 3 = 7 + 3\sqrt{2}$ et $2x_2 + 3 = 7 - 3\sqrt{2}$.

4. L'inéquation $f(x) \leqslant 2x + 3$ équivaut à $2x^2 - 8x - 1 \leqslant 0$. Le signe du polynôme :

x	$-\infty$		$2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$		$2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
P(x)		+	0	−	0	+	

Solution de l'inéquation : S = $[2 - \frac{3\sqrt{2}}{2} ; 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}]$.

5. L'interprétation géométrique de la question 4 :
La courbe P est en-dessous de la droite d sur l'intervalle $[2 - \frac{3\sqrt{2}}{2} ; 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}]$.



EXERCICE 3 :

On considère le cercle de centre O et de rayon 5 cm.
Le point A est un point du cercle et le point C est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle 90° dans le sens anti-horaire.
Le point E est le symétrique de A par rapport à O et le point G est le symétrique de C par rapport à O.
Le point J est tel que OAJC est un carré. Le segment [OJ] coupe le cercle en B. D est le symétrique de B par rapport à (OC).
Le point H est le symétrique de B par rapport à la droite (OA).
Le point F est le symétrique de H par rapport à la droite (OC).

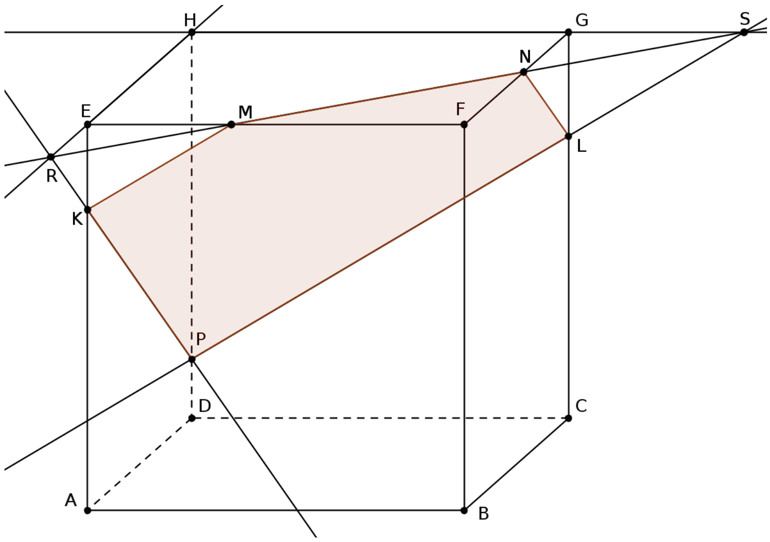
1. La figure :
2. Le polygone ABCDEFGH est un octogone régulier.
3. Le triangle ABC a pour image le triangle DEF par la rotation de centre O et d'angle 135°.
4. AC est la diagonale du carré AJCO de côté 5 cm, donc $AC = 5\sqrt{2}$ cm.
ACEG est un carré de côté AC, donc son aire est égale à $AC^2 = (5\sqrt{2})^2 = 50$ cm^2.
5. Construction du point K image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$.
6. Construction du point L image du point K par la rotation de centre O et d'angle 90° dans le sens anti-horaire.
7. On sait que $BD = AC = 5\sqrt{2}$, donc $OK = AK - OA = BD - OA = 5\sqrt{2} - 5 = 5(\sqrt{2} - 1)$.
Par la rotation, OL = OK et l'angle $\widehat{KOL} = 90°$. On utilise Pythagore dans le triangle OKL rectangle en O :
$KL^2 = OK^2 + OL^2 = 2OK^2 = 2(5(\sqrt{2} - 1))^2 = 2\times25(2 - 2\sqrt{2} + 1) = 50(3 - 2\sqrt{2})$.
D'où $KL = \sqrt{50(3-2\sqrt{2})} = 5\sqrt{2(3-2\sqrt{2})}$ cm.

BONUS : Calcul de la longueur AB : Soit T le centre du carré OAJC. Alors $AT = \frac{1}{2}AC = \frac{5\sqrt{2}}{2} = OT$;
d'où $TB = OB - OT = 5 - \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Dans le triangle ABT rectangle en T, on utilise Pythagore :

$AB^2 = AT^2 + BT^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(5 - \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{25}{2} + 25 - 25\sqrt{2} + \frac{25}{2} = 50 - 25\sqrt{2}$.

Et $AB = \sqrt{50 - 25\sqrt{2}} = 5\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

EXERCICE 4 :



1. La section du plan (MNP) par le cube ABCDEFGH : La droite (MN) coupe (EH) en R et (GH) en S. La droite (PS) est dans le plan (CDG), donc elle coupe (GC) en L. La droite (PR) est dans le plan (ADH) donc elle coupe (AE) en K. La section est le pentagone MNLPK.

2. Deux droites parallèles du plan (MNP) : (MN) et (). Ces droites sont parallèles car elles sont les intersections d'un plan par deux plans parallèles qui sont (ABC) et (EFG). Le théorème : Si deux plans sont parallèles, si un troisième plan coupe ces deux plans, alors les droites d'intersection sont parallèles.

3. La perspective parallèle conserve : Le parallélisme : OUI ; Les angles: NON ; Les longueurs: NON ; Les milieux: OUI ; Sur la figure, (AC) est une fuyante : NON ; (EH) est une fuyante : OUI.

EXERCICE 5 : On considère le triangle équilatéral ABC ci-dessous.
On note r la rotation de centre D et d'angle 120° dans le sens horaire. On note t la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.
1. Construction des images A' , B' et C' des points A, B et C par r.
2. La rotation conserve les longueurs, donc AB = A'B' ; de plus, l'angle formé par les droites (AB) et (A'B') est égal à l'angle de la rotation, donc l'angle formé par les droites (AB) et (A'B') est égal à 120°.
3. Construction de EFG image du triangle ABC par t.
4. Une transformation du plan tel que A'B'C' ait pour image EFG : la translation de vecteur $\overrightarrow{A'D}$, ou la rotation de centre H point d'intersection des médiatrice de [A'D] et de [C'E] et d'angle 120° dans le sens horaire. Ce point H est sur le segment [CD].