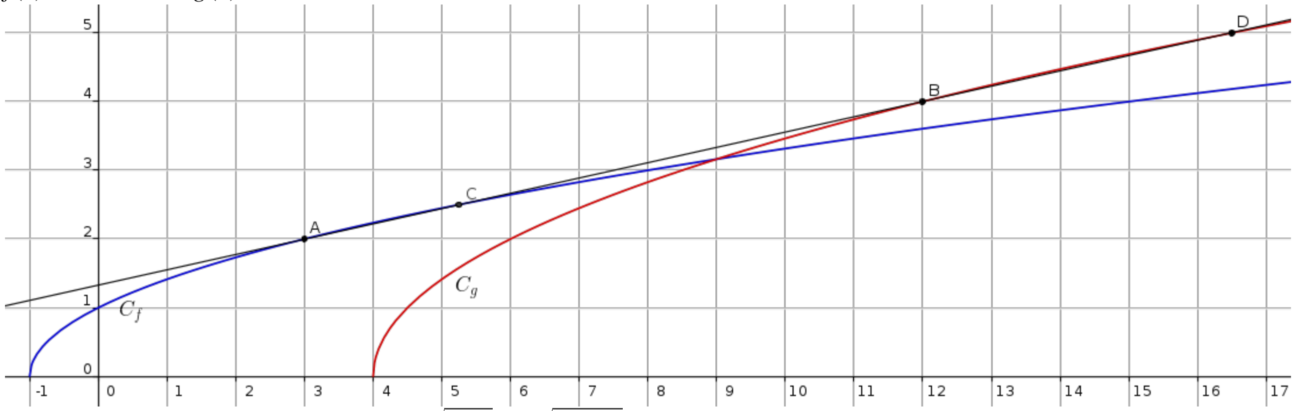
CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 5 PREMIÈRE STD2A

Exercice 1 : 1. Les ensembles de définition des fonctions : $D_f = [-1 ; +\infty[$ et $D_g = [4 ; +\infty[$.
Dans un repère du plan, on trace les courbes représentatives des fonctions f et g définies par
$f(x) = \sqrt{x+1}$ et $g(x) = \sqrt{2x-8}$:



2. L'équation $f(x) = g(x)$ équivaut à $\sqrt{x+1} = \sqrt{2x-8}$. On élève au carré : $x + 1 = 2x - 8$ équivaut à
$1 + 8 = 2x - x$ équivaut à $x = 9$. Vérification : $f(9) = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ et $g(9) = \sqrt{2\times 9-8} = \sqrt{10}$.
Donc la solution est S = { $\sqrt{10}$ }.

3. On considère le point A d'abscisse 3 situé sur la courbe C_f et le point B d'abscisse 12 situé sur la courbe C_g.

a) Les ordonnées des points A et B : $y_A = \sqrt{3+1} = 2$ et $y_B = \sqrt{2\times 12-8} = 4$. Donc A(3 ; 2) et B(12 ; 4).

b) Tracé de la droite (AB) dans le même repère. On cherche la fonction affine h dont la représentation graphique est la droite (AB) : son coefficient directeur est donné par $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-2}{12-3} = \frac{2}{9}$; et l'ordonnée à l'origine vérifie $y_A = \frac{2}{9} x_A + p$, d'où $p = y_A - \frac{2}{9} x_A = 2 - \frac{2}{9}\times 3 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$. Donc $h(x) = \frac{2}{9} x + \frac{4}{3}$.

c) Cette droite recoupe les courbes C_f et C_g si les équations $f(x) = h(x)$ et $g(x) = h(x)$ admettent des solutions :

$f(x) = h(x)$ équivaut à $\sqrt{x+1} = \frac{2}{9} x + \frac{4}{3}$. On élève au carré : $x + 1 = \left(\frac{2}{9}x+\frac{4}{3}\right)^2$ équivaut à

$x + 1 = \frac{4}{81}x^2+\frac{16}{27}x+\frac{16}{9}$ équivaut à $0 = \frac{4}{81}x^2 - \frac{11}{27}x + \frac{7}{9}$.

On calcule le discriminant : $\Delta = \left(\frac{-11}{27}\right)^2 - 4\times\frac{4}{81}\times\frac{7}{9} = \frac{1}{81} = \left(\frac{1}{9}\right)^2 > 0$,

donc il y a deux solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{11}{27}-\frac{1}{9}}{2\times\frac{4}{81}} = 3$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{11}{27}+\frac{1}{9}}{2\times\frac{4}{81}} = \frac{21}{4}$. Vérification :

$f(3) = \sqrt{3+1} = 2$ et $h(3) = \frac{2}{9}\times 3 + \frac{4}{3} = 2$; $f\left(\frac{21}{4}\right) = \sqrt{\frac{21}{4}+1} = 2{,}5$ et $h\left(\frac{21}{4}\right) = \frac{2}{9}\times\frac{21}{4} + \frac{4}{3} = 2{,}5$.

Donc les points A(3 ; 2) et C($\frac{21}{4}$; 2,5) sont les points d'intersection de C_f et la droite (AB).

$g(x) = h(x)$ équivaut à $\sqrt{2x-8} = \frac{2}{9} x + \frac{4}{3}$. On élève au carré : $2x - 8 = \left(\frac{2}{9}x+\frac{4}{3}\right)^2$ équivaut à

$2x - 8 = \frac{4}{81}x^2+\frac{16}{27}x+\frac{16}{9}$ équivaut à $0 = \frac{4}{81}x^2 - \frac{38}{27}x + \frac{88}{9}$.

On calcule le discriminant : $\Delta = \left(\frac{-38}{27}\right)^2 - 4\times\frac{4}{81}\times\frac{88}{9} = \frac{4}{81} = \left(\frac{2}{9}\right)^2 > 0$,

donc il y a deux solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{38}{27}-\frac{2}{9}}{2\times\frac{4}{81}} = 12$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{38}{27}+\frac{2}{9}}{2\times\frac{4}{81}} = 16{,}5$. Vérification :

$g(12) = \sqrt{2\times 12-8} = 4$ et $h(12) = \frac{2}{9}\times 12 + \frac{4}{3} = 4$; $g(16{,}5) = \sqrt{2\times 16{,}5-8} = 5$ et $h(16{,}5) = \frac{2}{9}\times 16{,}5 + \frac{4}{3} = 5$.

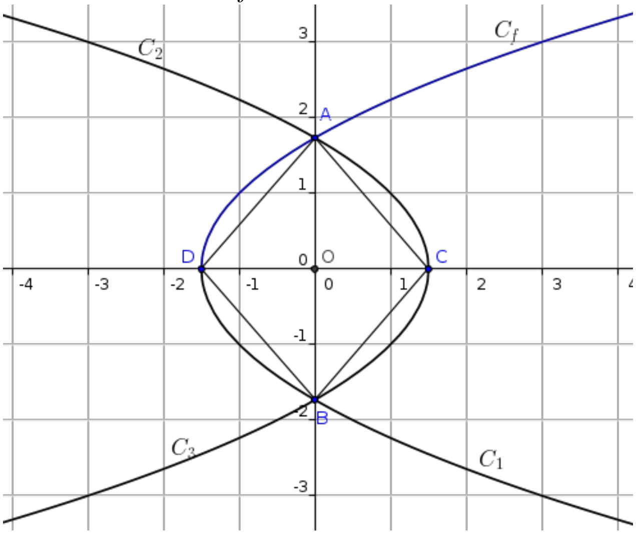
Donc les points B(12 ; 4) et D(16,5 ; 5) sont les points d'intersection de C_g et la droite (AB).

Exercice 2 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2x+3}$.

1. L'ensemble de définition de cette fonction il faut que $2x + 3 \geqslant 0$ soit $x \geqslant -1{,}5$; donc $D_f = [-1{,}5 ; +\infty[$

2. Dans un repère du plan, tracé de la courbe (C) représentative de la fonction f .

3. Construction de la courbe (C_1) symétrique de (C) par rapport à l'axe des abscisses, de la courbe (C_2) symétrique de (C) par rapport à l'axe des ordonnées, de la courbe (C_3) symétrique de (C) par rapport à l'origine du repère.



6. Les quatre courbes se coupent aux points A, B, C et D.

a) Les coordonnées des quatre points :

(C) et (C_2) se coupent en un point de l'axe des ordonnées, d'ordonnée $f(0) = \sqrt{3}$;

(C) et (C_1) se coupent en un point de l'axe des abscisses, d'abscisse x tel que $f(x) = 0$, soit $\sqrt{2x+3} = 0$, soit $2x + 3 = 0$, soit $x = -1{,}5$;

(C_1) et (C_3) se coupent en un point de l'axe des ordonnées, d'ordonnée $-f(0) = -\sqrt{3}$;

(C_2) et (C_3) se coupent en un point de l'axe des abscisses, d'abscisse x tel que $f(-x) = 0$, soit $\sqrt{2(-x)+3} = 0$, soit $-2x + 3 = 0$, soit $x = 1{,}5$.

D'où les quatre points :

A$(0 ; \sqrt{3})$, B$(0 ; -\sqrt{3})$, C(1,5 ; 0) et D(– 1,5 ; 0).

b) Le quadrilatère ACBD est un losange :

On calcule les longueurs des côtés de ce quadrilatère :

AC = $\sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{1{,}5^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{2{,}25+3} = \sqrt{5{,}25}$;

CB = $\sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(-1{,}5)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{2{,}25+3} = \sqrt{5{,}25}$;

BD = $\sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{(-1{,}5)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{2{,}25+3} = \sqrt{5{,}25}$;

AD = $\sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{(-1{,}5)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{2{,}25+3} = \sqrt{5{,}25}$.

Les quatre côtés sont de même longueur, donc ACBD est un losange.