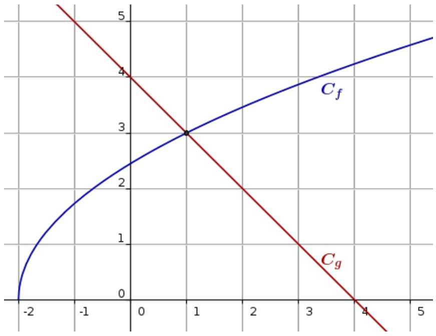
CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ N° 4 PREMIÈRE STD2A

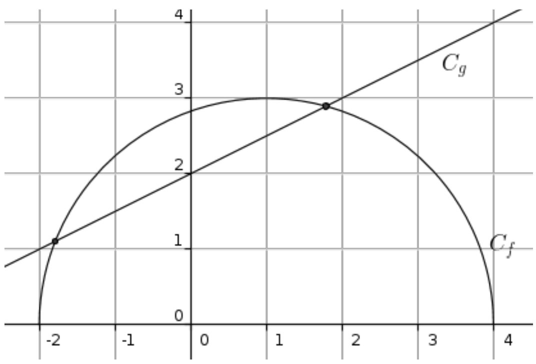
EXERCICE 1 : 1. La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}^+ = [0\ ;+\infty[$;
2. La courbe représentative de la fonction racine carrée est une demi parabole.
3. Si $0 \leqslant a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$;
Si $2 \leqslant a < b$ alors $-a > -b$, d'où $2-a > 2-b$, d'où $\sqrt{2-a} > \sqrt{2-b}$;
4. Si $0 \leqslant x < 1$ alors $\sqrt{x} > x$; si $x > 1$ alors $\sqrt{x} < x$.

EXERCICE 2 : On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \sqrt{3x+6}$ et $g(x) = 4-x$.
1. L'ensemble de définition de la fonction f : il faut que $3x+6 \geqslant 0$, soit $3x \geqslant -6$, soit $x \geqslant -2$; donc $D_f = [-2\ ;+\infty[$.
La fonction g est une fonction affine donc elle est définie sur $\mathbb{R}$. $D_g = \mathbb{R}$.
2. Dans un repère du plan, le tracé les courbes représentatives de f et g:



3. Résolution de l'équation $f(x) = g(x)$: $\sqrt{3x+6} = 4-x$;
on élève au carré : $3x+6 = (4-x)^2$;
on développe : $3x+6 = 16-8x+x^2$; on simplifie : $0 = 10-11x+x^2$;
équivaut à $x^2-11x+10 = 0$;
on calcule le discriminant $\Delta = b^2-4ac = (-11)^2-4\times1\times10 = 81 = 9^2 > 0$,
donc l'équation a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{11+9}{2} = 10$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{11-9}{2} = 1$. On a $f(1) = \sqrt{3\times1+6} = 3$ et $g(1) = 4-1 = 3$.
On a $f(10) = \sqrt{3\times10+6} = 6$ et $g(10) = 4-10 = -6$. Donc l'équation a une solution : $S = \{1\}$.
4. Résolution graphique de l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$: on cherche les abscisses des points de la courbe C_f situés au-dessus de la courbe C_g : on trouve $S = [1\ ;+\infty[$.

EXERCICE 3 :
La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{-x^2+2x+8}$.
1. L'ensemble de définition de la fonction f : il faut que $-x^2+2x+8 \geqslant 0$; on calcule le discriminant
$\Delta = b^2-4ac = 2^2-4\times1(-1)\times8 = 36 = 6^2 > 0$, donc l'équation a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2+6}{2\times(-1)} = \dfrac{4}{-2} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2-6}{2\times(-1)} = \dfrac{-8}{-2} = 4$. La fonction f est un polynôme du second degré, il est du signe de $a = -1 < 0$ sur $]-\infty\ ;-2] \cup [4\ ;+\infty[$ et positif sur $[-2\ ;4]$. Donc $D_f = [-2\ ;4]$.
2. Tracé de la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x+2$ dans le même repère.
3. Pour déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite et de la courbe représentative de f, on résout l'équation $f(x) = g(x)$: $\sqrt{-x^2+2x+8} = \dfrac{1}{2}x+2$; on élève au carré : $-x^2+2x+8 = (\dfrac{1}{2}x+2)^2$; on développe : $-x^2+2x+8 = \dfrac{1}{4}x^2+2x+4$; on simplifie : $-\dfrac{5}{4}x^2+4 = 0$ équivaut à $\dfrac{5}{4}x^2 = 4$ équivaut à $5x^2 = 16$ équivaut à $x^2 = \dfrac{16}{5}$ équivaut à $x = \dfrac{4}{\sqrt{5}} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ ou $x = \dfrac{-4}{\sqrt{5}} = \dfrac{-4\sqrt{5}}{5}$. Il y a deux points d'intersection d'abscisses $x_1 = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ et $x_2 = \dfrac{-4\sqrt{5}}{5}$; les ordonnées : $y_1 = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{4\sqrt{5}}{5}+2 = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}+2 = \dfrac{2\sqrt{5}+10}{5}$ et
$y_2 = \dfrac{1}{2}+2\,\dfrac{-4\sqrt{5}}{5} = \dfrac{-2\sqrt{5}}{5}+2 = \dfrac{-2\sqrt{5}+10}{5}$.



BONUS : Montrons que la courbe représentative de la fonction f est un demi-cercle de centre $\Omega(1\ ;0)$ et de rayon 3 :
un point $M(x\ ;y)$ est sur le cercle si $\Omega M = 3$, soit $\Omega M^2 = 9$, soit $(x-1)^2+(y-0)^2 = 9$, soit $x^2-2x+1+y^2 = 9$, soit $y^2 = 9-x^2+2x-1$, soit $y^2 = -x^2+2x+8$.
D'où $y = \sqrt{-x^2+2x+8}$ ou $y = -\sqrt{-x^2+2x+8}$. La première relation équivaut à $y = f(x)$, donc la courbe représentative de la fonction f est bien le demi-cercle de centre $\Omega(1\ ;0)$ et de rayon 3 situé au-dessus de l'axe des abscisses.