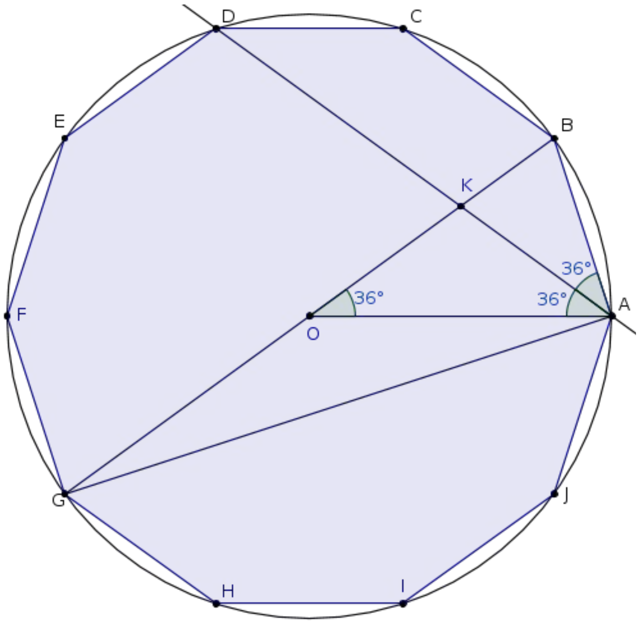
CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 4 PREMIÈRE STD2A



1. Construction du pentagone régulier ACEGI de centre O, en prenant OA = 6 cm.
2. Construction du décagone ABCDEFGHIJ.

La bissectrice de l'angle $\widehat{OAB}$ coupe [OB] en K.
On a donc $\widehat{OAK} = \widehat{KAB}$.

3. On sait que $\widehat{BOA} = \frac{360}{10} = 36°$, et OAB est un triangle isocèle en O, donc $\widehat{OBA} = \widehat{OAB} = \frac{180-36}{2} = 72°$.

$\widehat{OAK} = \widehat{KAB} = \frac{72}{2} = 36°$,
donc $\widehat{BKA} = 180 - 72 - 36 = 72°$,
donc le triangle AKB est isocèle en A.

4. Comme $\widehat{BOA} = 36°$, et OAB est isocèle en O,
donc $\widehat{ABO} = \widehat{BAO} = \frac{180-36}{2} = 72°$.
Donc les triangles AOB et AKB ont des angles de même mesure.

5. Ainsi, les triangles sont semblables et $\frac{KB}{AB} = \frac{AB}{OB}$.

6. On sait que $\widehat{OAK} = 36°$ et $\widehat{KOA} = \widehat{BOA} = 36°$, donc le triangle OAK est isocèle en K, donc OK = AK = AB, donc $\frac{KB}{AB} = \frac{OB-OK}{AB} = \frac{OB-AB}{AB} = \frac{OB}{AB} - 1$; donc $\frac{AB}{OB} = \frac{OB}{AB} - 1$. En posant $x = \frac{AB}{OB}$, on obtient $\frac{OB}{AB} = \frac{1}{x}$, d'où $x = \frac{1}{x} - 1$, soit $x = \frac{1-x}{x}$, soit $x^2 = 1 - x$, soit $x^2 + x - 1 = 0$.

7. On calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times1\times(-1) = 5 > 0$, donc il y a deux solutions :
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Le nombre $x = \frac{AB}{OB}$ est un rapport de longueur, il est donc positif, donc $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \simeq 0{,}618$.

8. On sait que le rayon du cercle est égal à OA = OB = 6 cm, donc $\frac{AB}{OB} = \frac{AB}{6} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$,
donc AB = $6\times\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = -3+3\sqrt{5} \simeq 3{,}71$.

9. Le triangle ABG est rectangle en A car le côté [BG] est un diamètre du cercle circonscrit (car $\widehat{BOG} = 5\times36 = 180°$) ; on applique le théorème de Pythagore :
$AG^2 = BG^2 - AB^2 = 12^2 - \left(-3+3\sqrt{5}\right)^2 = 144 - (9 - 18\sqrt{5} + 9\times5) = 90 + 18\sqrt{5} = 9(10 + 2\sqrt{5})$,
d'où $AG = 3\sqrt{10+2\sqrt{5}} \simeq 11{,}41$.