CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 7 PREMIÈRE STD2A

EXERCICE 1 : On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1. a) Pour montrer qu'il existe deux points A et B de la courbe C ayant des tangentes horizontales, on détermine le nombre dérivé en a : $P'(a) = 3a^2 - 6a - 9$. La tangente est horizontale si le nombre dérivé est égal à 0 :
soit $3a^2 - 6a - 9 = 0$; on divise par 3 : $a^2 - 2a - 3 = 0$; on calcule le discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\times1\times(-3) = 16 = 4^2 > 0$, donc il y a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2+4}{2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2-4}{2} = -1$.

b) $x_A = 3$ et $y_A = P(3) = 3^3 - 3\times3^2 - 9\times3 + 10 = -17$;
$x_B = -1$ et $y_B = P(-1) = (-1)^3 - 3\times(-1)^2 - 9\times(-1) + 10 = 15$. Donc A(3 ; – 17) et B(– 1 ; 15).

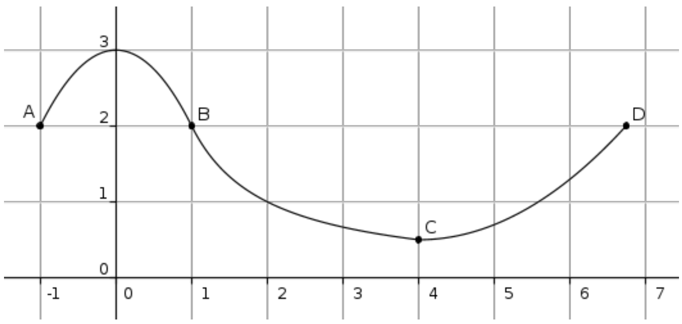
2. Soit I le milieu du segment [AB].

a) Les coordonnées de I, milieu de [AB] : $x_I = \dfrac{x_A+x_B}{2} = \dfrac{3-1}{2} = 1$ et $y_I = \dfrac{y_A+y_B}{2} = \dfrac{-17+15}{2} = 1$; I(1 ; – 1).

b) Le nombre dérivé k du polynôme P en l'abscisse de I est $P'(1) = 3\times1^2 - 6\times1 - 9 = -12$.

3. L'inéquation $P'(x) \geqslant -12$ équivaut à $3x^2 - 6x - 9 \geqslant -12$ équivaut à $3x^2 - 6x + 3 \geqslant 0$ équivaut à $x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$ (en divisant par 3) équivaut à $(x-1)^2 \geqslant 0$; les solutions sont tous les nombres réels.
On en déduit que pour tous les points de la courbe, le nombre dérivé est supérieur ou égal à – 12.

EXERCICE 2 : La courbe ci-contre est composée de trois parties.
L'arc de courbe entre A et B qui est une parabole dont le sommet est situé sur l'axe des ordonnées ;
l'arc de courbe entre B et C qui est l'hyperbole représentative de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2}{x}$;
l'arc de courbe entre C et D qui est la parabole représentative de la fonction g définie par
$g(x) = 0{,}2x^2 - 1{,}6x + 3{,}7$.



1. La parabole entre A et B a pour sommet S(0 ; 3).
Donc la forme canonique du polynôme h est
$h(x) = a(x-0)^2 + 3 = ax^2 + 3$; la parabole passe par A(– 1 ; 2), donc $h(-1) = 2$, soit $a + 3 = 2$, donc $a = -1$.
Ainsi $h(x) = -x^2 + 3$.

2. Les deux courbes se coupant au point B ont la même tangente en B si les nombres dérivés de h et de f sont les mêmes au point d'abscisse 1 : $h'(x) = -2x$, donc $h'(1) = -2$; $f'(x) = \dfrac{-2}{x^2}$, donc $f'(1) = \dfrac{-2}{1^2} = -2$; donc les courbes se coupant au point B ont la même tangente.

3. Les deux courbes se coupant au point C ont la même tangente en C si les nombres dérivés de g et de f sont les mêmes au point d'abscisse 4 : $g'(x) = 0{,}4x - 1{,}6$, donc $g'(4) = 0$; $f'(4) = \dfrac{-2}{4^2} = -0{,}125$; donc les courbes se coupant au point C n'ont pas la même tangente.

4. Le point D a pour ordonnée 2 ; son abscisse vérifie l'équation $g(x) = 2$, soit $0{,}2x^2 - 1{,}6x + 3{,}7 = 2$ équivaut à $0{,}2x^2 - 1{,}6x + 1{,}7 = 0$; on calcule le discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-1{,}6)^2 - 4\times0{,}2\times1{,}7 = 1{,}2 > 0$, donc il y a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1{,}6+\sqrt{1{,}2}}{2\times0{,}2} \simeq 6{,}74$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1{,}6-\sqrt{1{,}2}}{2\times0{,}2} \simeq 1{,}26$.
Donc d'après la figure, l'abscisse de D est 6,7 à 0,1 près.

5. Le coefficient directeur de la tangente en D à la courbe représentative de g est $g'(6{,}7) = 0{,}4\times6{,}7 - 1{,}6 \simeq 1{,}08$.