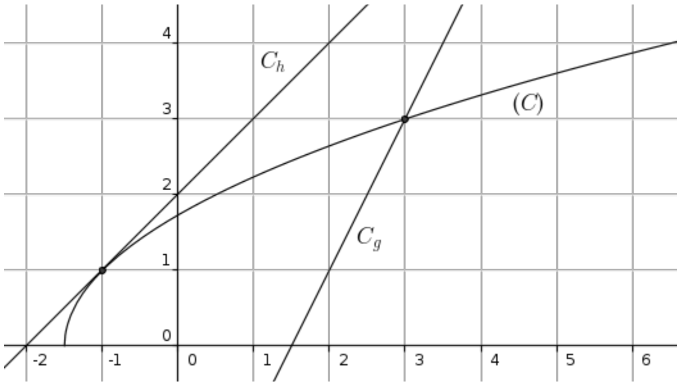
EXERCICE 1 : Pour $x \in [0 ; 1]$, $x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x}$. Pour $x \in [1 ; 2]$, $\sqrt{x} \leqslant x \leqslant x^2$.

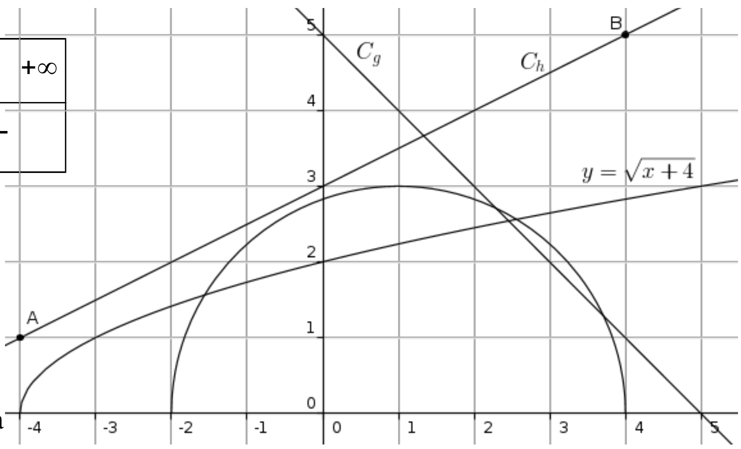
EXERCICE 2 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2x+3}$.
1. La fonction f est définie lorsque $2x + 3 \geqslant 0$, soit $2x \geqslant -3$, soit $x \geqslant -1{,}5$.
Donc l'ensemble de définition de cette fonction est $D_f = [-1{,}5 ; +\infty[$.
2. a) Tracé de la courbe (C) représentative de la fonction f :
b) Cette courbe est une demie parabole.
3. a) Tracé de la droite représentative de la fonction g définie par $g(x) = 2x - 3$.
b) L'équation $f(x) = g(x)$ équivaut à $\sqrt{2x+3} = 2x - 3$; on élève au carré : $2x + 3 = (2x - 3)^2$;
on développe : $2x + 3 = 4x^2 - 12x + 9$; on compare à zéro: $4x^2 - 14x + 6 = 0$;
on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4\times4\times6 = 100 = 10^2 > 0$, donc l'équation a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{14+10}{2\times4} = 3$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{14-10}{2\times4} = \dfrac{4}{8} = 0{,}5$.
Vérification : $f(3) = \sqrt{2\times3+3} = \sqrt{9} = 3$ et $g(3) = 2\times3 - 3 = 3$; donc 3 est solution de l'équation $f(x) = g(x)$.
$f(0{,}5) = \sqrt{2\times0{,}5+3} = \sqrt{4} = 2$ et $g(0{,}5) = 2\times0{,}5 - 3 = -2$; donc 0,5 n'est pas solution de l'équation $f(x) = g(x)$.
S = {3}.
4. a) Tracé de la droite représentative de la fonction h définie par $h(x) = x + 2$.



b) L'équation $f(x) = h(x)$ équivaut à $\sqrt{2x+3} = x + 2$;
on élève au carré : $2x + 3 = (x + 2)^2$;
on développe : $2x + 3 = x^2 + 4x + 4$;
on compare à zéro: $x^2 + 2x + 1 = 0$;
on calcule $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\times1\times1 = 0$, donc l'équation a une solution : $x_1 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{2\times1} = -1$.
Vérification : $f(-1) = \sqrt{2\times(-1)+3} = \sqrt{1} = 1$ et $h(-1) = (-1) + 2 = 1$;
donc -1 est solution de l'équation $f(x) = h(x)$. S = {– 1}.

EXERCICE 3 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{-x^2+2x+8}$ et sa courbe représentative donnée ci-contre.
1. La fonction f est définie lorsque $-x^2 + 2x + 8 \geqslant 0$; on calcule $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\times(-1)\times8 = 36 = 6^2 > 0$,
donc l'équation a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2+6}{2\times(-1)} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2-6}{2\times(-1)} = 4$.
On réalise un tableau de signes : ($a = -1 < 0$)

x	$-\infty$		2		6		$+\infty$
$-x^2 + 2x + 8$		$-$	0	$+$	0	$-$	



Donc l'ensemble de définition de la fonction f est l'intervalle [– 2 ; 4].
2. Sans justification, indiquer le nombre de solutions des équations :
a) $f(x) = g(x)$ avec $g(x) = -x + 5$: Deux solutions car deux points d'intersection ;
b) $f(x) = h(x)$ avec h la fonction représentative de la droite passant par A(– 4 ; 1) et B(4 ; 5) : aucune solution, car pas de points d'intersection.
c) $f(x) = \sqrt{x+4}$: Deux solutions car deux points d'intersection.
BONUS : L'équation $f(x) = \sqrt{x+4}$: on élève au carré : $-x^2 + 2x + 8 = x + 4$; on compare à zéro: $-x^2 + x + 4 = 0$;
on calcule $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times(-1)\times4 = 17 > 0$, donc l'équation a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2\times(-1)} = \dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2\times(-1)} = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$.